Symmetrien

der primen Restklassen modulo 60

von Oliver Niemöller **[on:]**

Erläuterung

Symmetrien

der primen Restklassen modulo 60

Gliederung anhand des Titels
in umgekehrter Reihenfolge

- **60**
- **modulo 60**
- **Restklassen**
- **prime Restklassen**
- **next level**
- **Symmetrie**

60

- **Die Zahl 60 spielt in unserem Leben eine große Rolle. Wir begegnen ihr immer wieder.**

  Die Einteilung der Stunde in 60 Minuten

  Die Winkel des gleichseitigen Dreiecks

  60° des Kreises entsprechen der Abtragung des Radius auf dem Kreis

- **$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$**

- **Die Primfaktoren von 60 sind 2^2, 3^1, 5^1**

modulo

- **Die Division mit Rest (3. Schuljahr)**
- Wenn zwei natürliche Zahlen, der Dividend a und der Divisor b (ungleich 0), mit Rest dividiert werden sollen,

  a : b sucht man ein Vielfaches von b und einen Rest, um a auszudrücken.

  $a = b \cdot c + r$
- **Beispiele:**

7 : 3 = 2, Rest 1,	da	$7 = 3 \cdot 2 + 1$
2 : 3 = 0, Rest 2,	da	$2 = 3 \cdot 0 + 2$
3 : 3 = 1, Rest 0,	da	$3 = 3 \cdot 1 + 0$

- Die Rechenoperation **modulo** berechnet nur den Rest der Division und wird meistens mit **mod** abgekürzt.
- **Beispiele:**

17 mod 3 = **2**,	da	$17 = 3 \cdot 5 + \mathbf{2}$
2 mod 3 = **2**,	da	$2 = 3 \cdot 0 + \mathbf{2}$
12 mod 3 = **0**,	da	$12 = 3 \cdot 4 + \mathbf{0}$

modulo 60

- Die Division durch 60 mit Rest erzeugt 60 verschiedene Reste:
  0 – 59
- Rest **0** bedeutet, dass die Zahl durch 60 teilbar ist.
- Bei der Betrachtung der Reste wird der Teiler (60) als **Modul** bezeichnet.
- Zahlen, die bei der Division mit gleichem Teiler den gleichen Rest ergeben, nennt man kongruent. Carl Friedrich Gauß hat dafür ein eigenes Zeichen eingeführt:
- **≡**
- ein Gleichheitszeichen mit 3 Strichen.

Restklassen

- Zahlen, die bei der Division durch den gleichen Teiler den gleichen Rest ergeben, nennt man kongruent.
- Kongruente Zahlen gehören zur gleichen sogenannten **Restklasse.**
- **Beispiele:**

  7 mod 3 = 1, 13 mod 3 = 1, → $7 \equiv 13 \bmod 3$

  7 und 13 gehören zur Restklasse 1 mod 3.

  7 mod 4 = 3, 15 mod 4 = 3, → $7 \equiv 15 \bmod 4$

  7 und 15 gehören zur Restklasse 3 mod 4.

- **Alle Elemente der verschiedenen Restklassen lassen sich darstellen als:**

  Rest + Modul x Ganzzahlquotient (z.B. $1 + 3 \cdot 2 = 7$; $3 + 4 \cdot 3 = 15$)

prime Restklassen

- Die Division mit Rest erzeugt also so viele verschiedene **Reste** oder **Restklassen** wie der **Teiler** oder **Modul**.
- **Aus diesen Resten werden nun diejenigen ausgeschlossen, die durch die Primfaktoren des Moduls teilbar sind.**
- Die übrig bleibenden Reste oder Restklassen heißen:

prime Restklassen.

- Beispiel **Modul 12**:
- **12 = 3 · 4, die Primfaktoren sind 2^2, 3^1**

  die möglichen Reste sind: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

  ausgeschlossen werden:

  0, 2, 4, 6, 8. 10, da sie durch 2 teilbar sind und

  0, 3, 6, 9, da sie durch 3 teilbar sind.

  übrig bleiben die *primen Restklassen modulo 12*:

  1, 5, 7, 11

prime Restklassen modulo 60

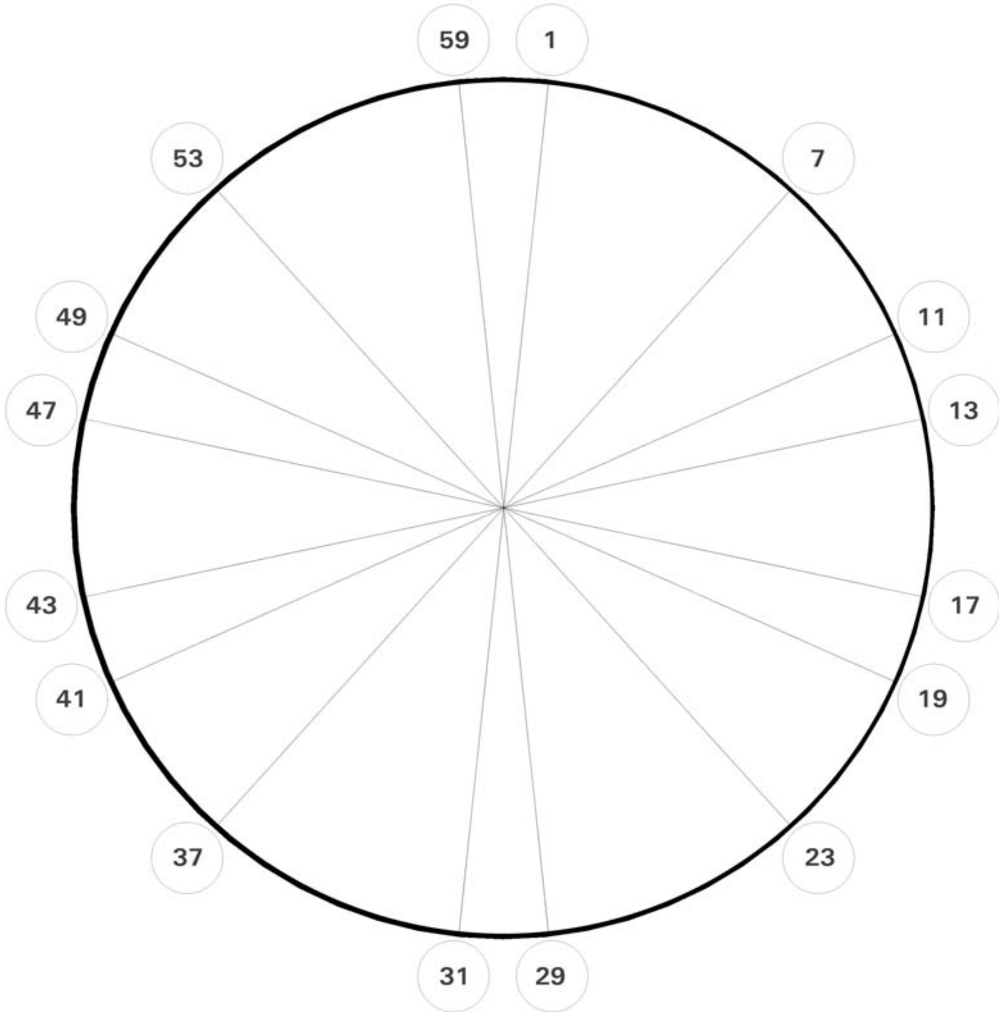
- Die Division durch 60 mit Rest erzeugt also 60 verschiedene Reste oder **Restklassen**.
- **Aus diesen 60 verschiedenen Resten werden nun diejenigen ausgeschlossen, die durch die Primfaktoren von 60 (2, 3, 5) teilbar sind. (2, 4, 6, 8, ..., 56, 58), (3, 6, 9, ..., 54, 57), (5, 10, 15, ..., 50, 55)**
- Es bleiben die folgenden **16 Reste**, die sogenannten

  ***primen Restklassen modulo 60*:**

  R^*_{60} = { 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59 }

- **Trägt man diese 16 Reste (prime Restklassen) in ein Uhrenziffernblatt ein, das eine Einteilung in 60 Minuten hat, ergibt sich eine symmetrische Anordnung, die zu beiden Achsen symmetrisch ist und damit auch eine Punktsymmetrie (180°) aufweist.**

prime Restklassen modulo 60



next level

- **Multiplizieren wir jetzt Elemente aus den primen Restklassen miteinander, ist das Ergebnis wieder ein Element einer primen Restklasse.**
- **Beispiele:**

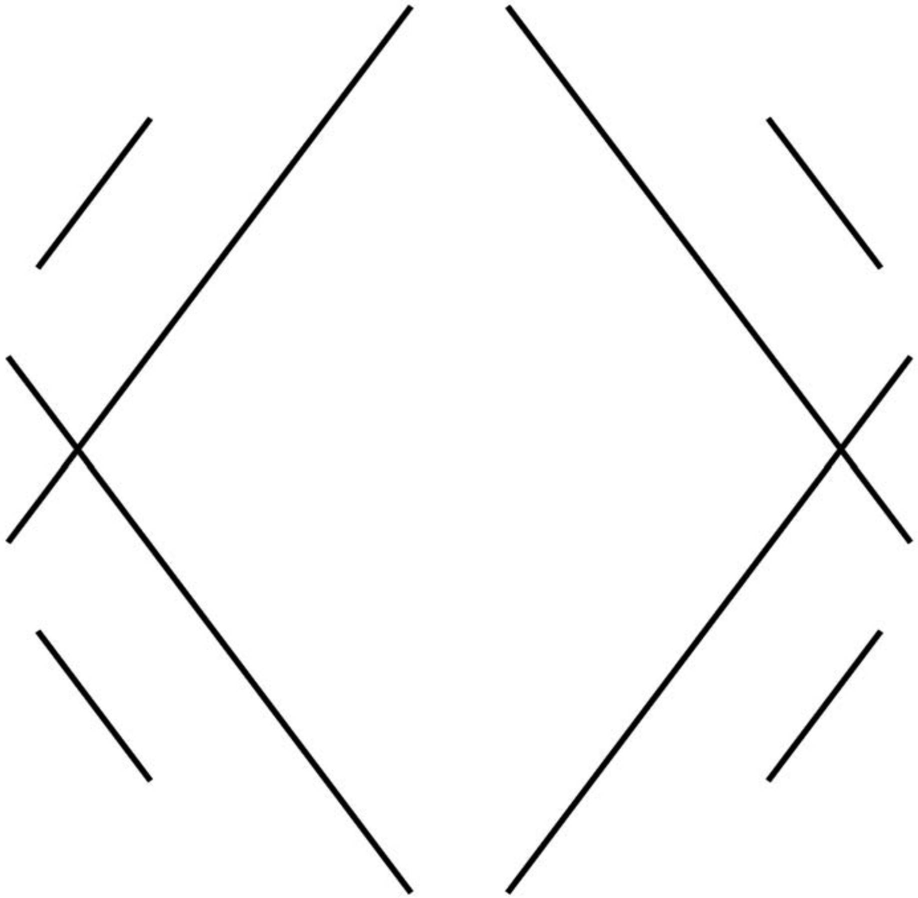
  $7 \cdot 11 = 77$, $77 : 60 = 1$ Rest 17, kurz $7 \cdot 11 \equiv 17 \mod 60$

  $127 \cdot 71 = 9017$, $9017 : 60 = 150$ Rest 17, kurz $127 \cdot 71 \equiv 17 \mod 60$

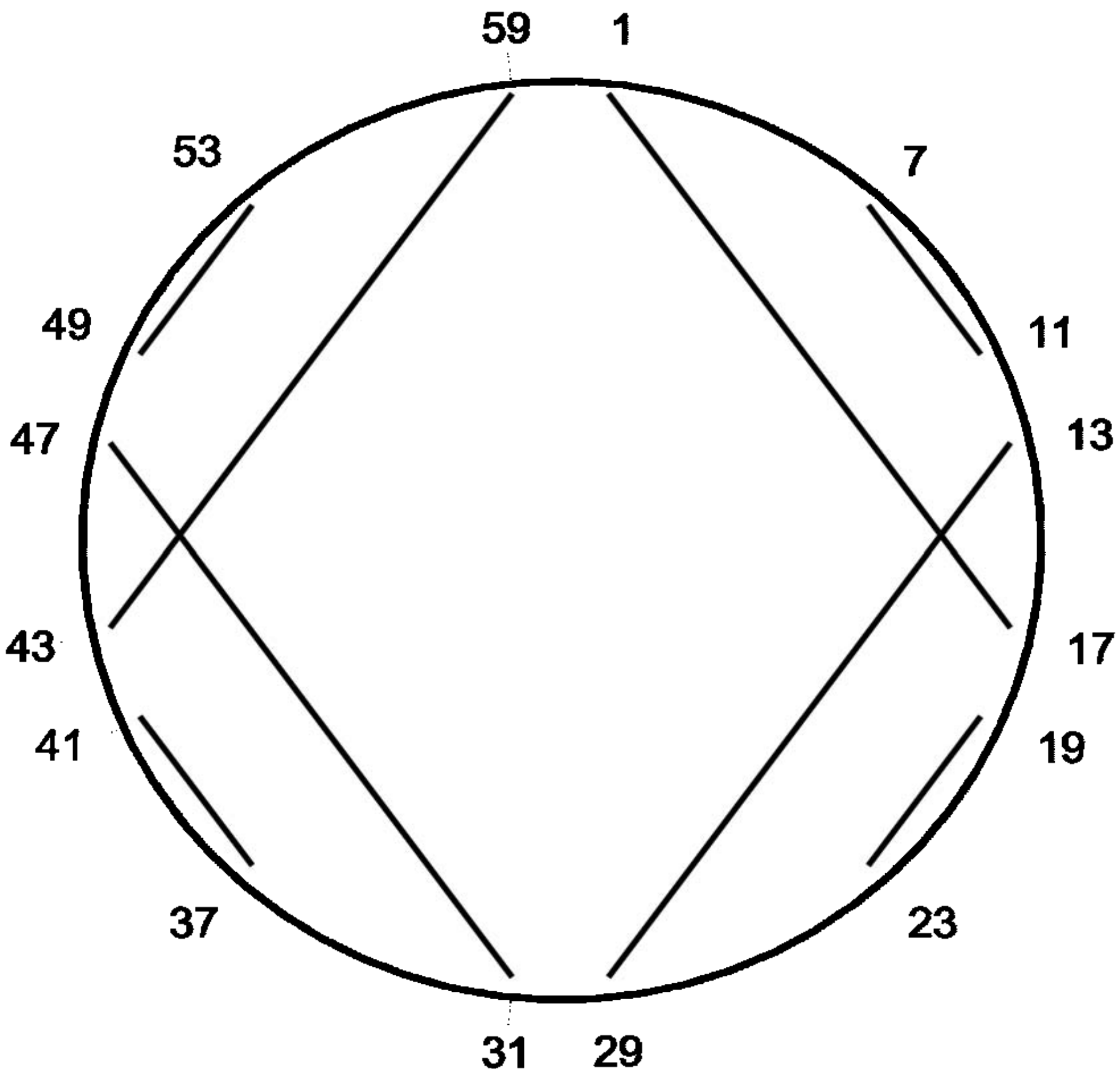
  $49 \cdot 53 = 2597$, $2597 : 60 = 43$ Rest 17, kurz $49 \cdot 53 \equiv 17 \mod 60$

- **Verbindet man in dem modifizierten Uhrenziffernblatt alle kongruenten Produktpaare einer primen Restklasse miteinander, ergeben sich symmetrische Anordnungen, die wieder zu beiden Achsen symmetrisch sind und damit auch wieder die Punktsymmetrie aufweisen.**
- **Lässt man das Uhrenziffernblatt weg, ergeben sich die Grafiken der Ausstellung.**

Produktpaare in der primen Restklasse 17 modulo 60



Produktpaare in der primen Restklasse 17 modulo 60



Symmetrien

der primen Restklassengruppe modulo 60

Es seien:

x, y, z prime Restklassen modulo 60,
R^*_{60} = { 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59 }, für die gilt:
[x]*[y] = [z]

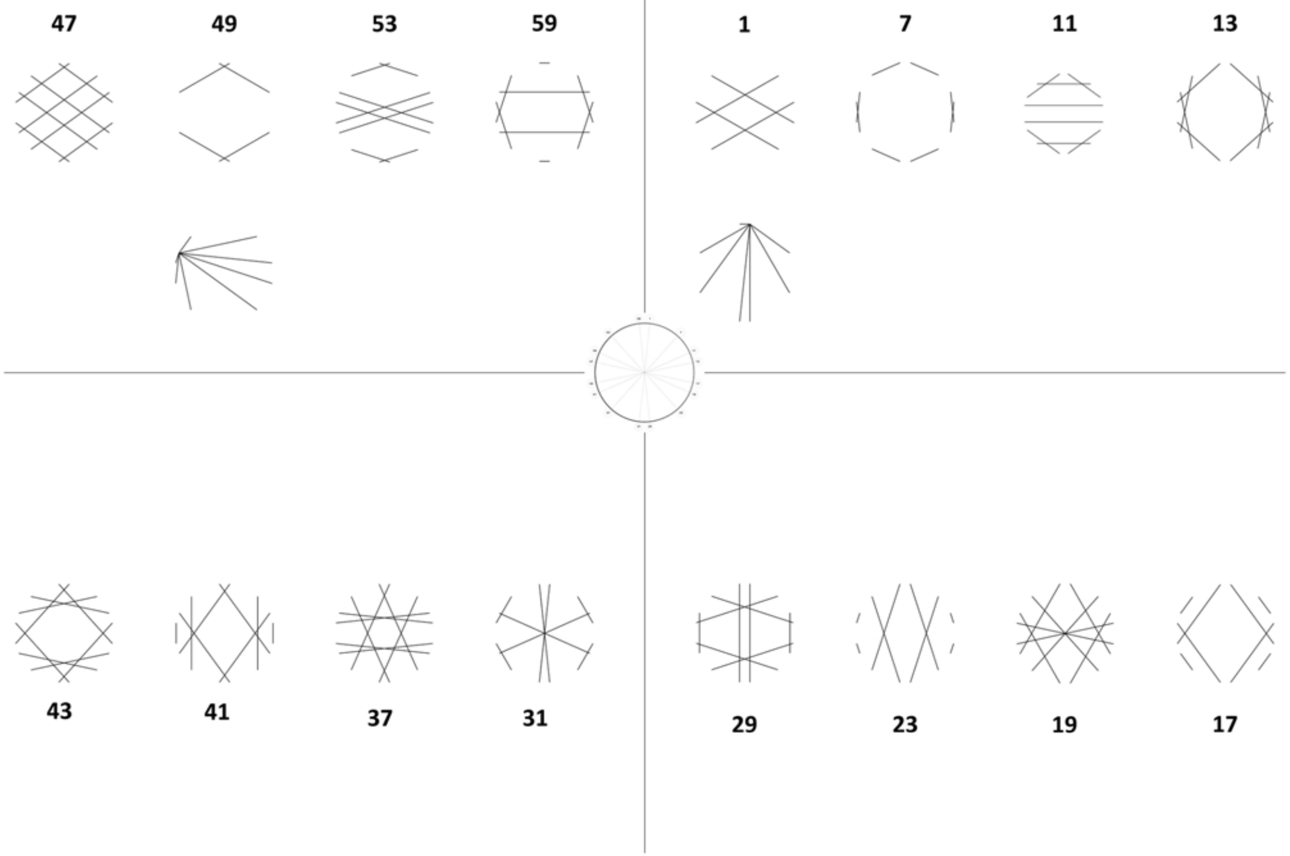
a ε [x]   a = x + R_a*60
b ε [y]   b = y + R_b*60
c ε [z]   c = z + R_c*60
a*b = c   a, b, c ε ***N*** R_a, R_b, R_c ε $\boldsymbol{N}_0$

ϕ (60) = 16

Es existieren jeweils 4 prime Restklassen mit den Endziffern 1, 3, 7, 9.

Dargestellt sind in einer Kreisdarstellung mit 1/60 Teilung (Ziffernblatt einer Uhr)
die Verbindungslinien zwischen den Produktpaaren x und y von z.

Für x != y existiert für jedes z eine eigene mehrfach symmetrische Figur.
Für x = y existieren 2 Figuren
für R_1 (Endziffern 1, 9),
für R_{49} (Endziffern 3, 7)



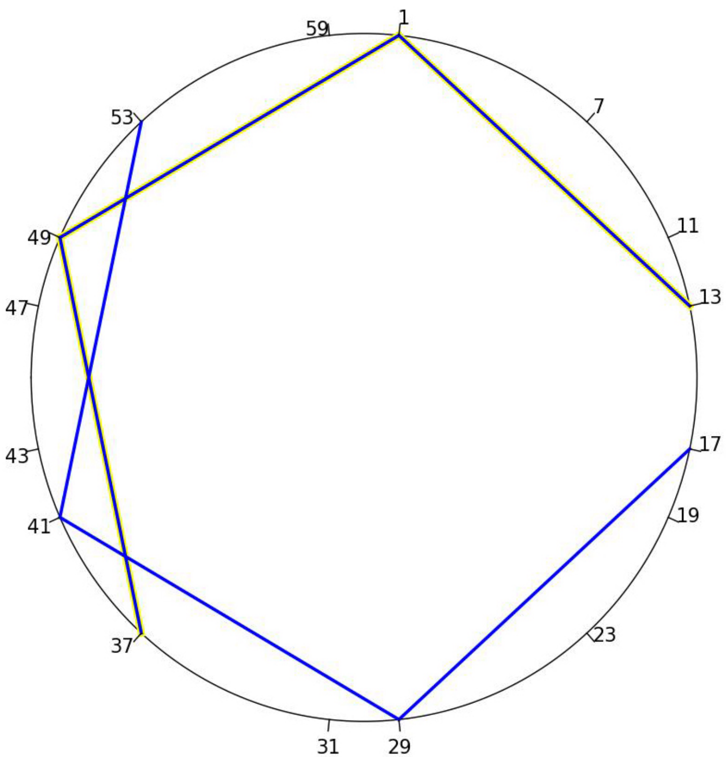
Für die Menge aller Elemente der primen Restklassen modulo60 vereinigt mit der Menge der Primfaktoren von 60 {2, 3, 5}, geschnitten mit der Menge aller Elemente von [z] = [x]*[y] für alle [z] ε R^*_{60} ergibt sich die Menge der Primzahlen.

Der goldene Schnitt in der Konstruktion

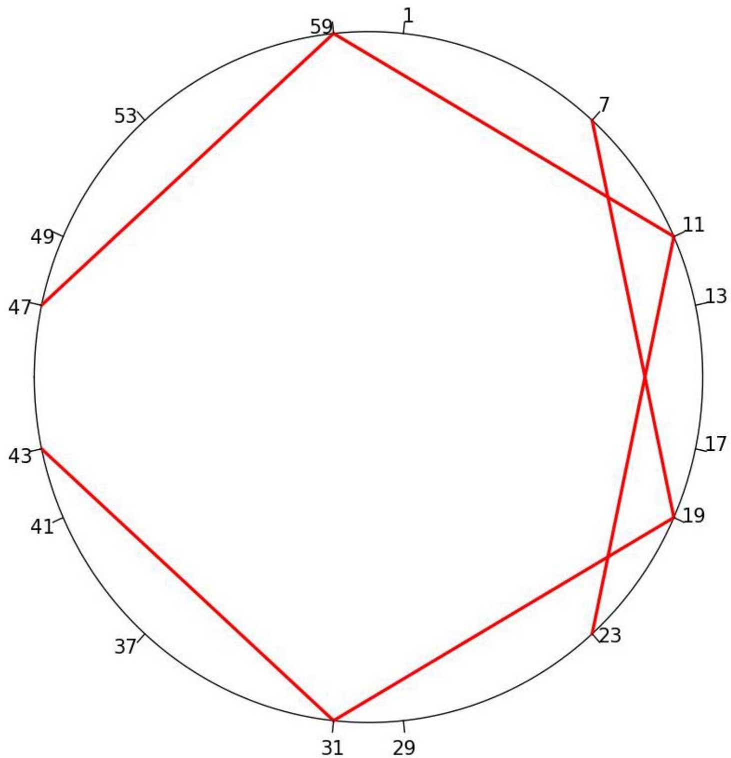
- **In der gewählten Darstellung sind die primen Restklassen untereinander mit verschiedenen geometrischen Figuren verbunden. Die interessanteste Figur darunter, die ich „Penta“ nenne, ist ein jeweils unvollständiges regelmäßiges Fünfeck mit vier Punkten. Der ergänzende (fehlende) fünfte Punkt hätte den Faktor 5 (5, 25, 35, 55), der aber Teiler des Moduls ist und deswegen nicht als prime Restklasse vorkommt.**
- **Durch diese Figuren ist der Goldene Schnitt Bestandteil der Symmetrie.**
- **Verbindet man die Lücke der fehlenden Schenkel des Pentagons mit einer Linie, ergibt sich eine Diagonale des Pentagons, die gleichzeitig Schenkel eines (eingeschriebenen) Pentagramms ist. Das Seitenverhältnis von Pentagonschenkel und Pentagrammschenkel steht im goldenen Schnitt.**

Die Pentas

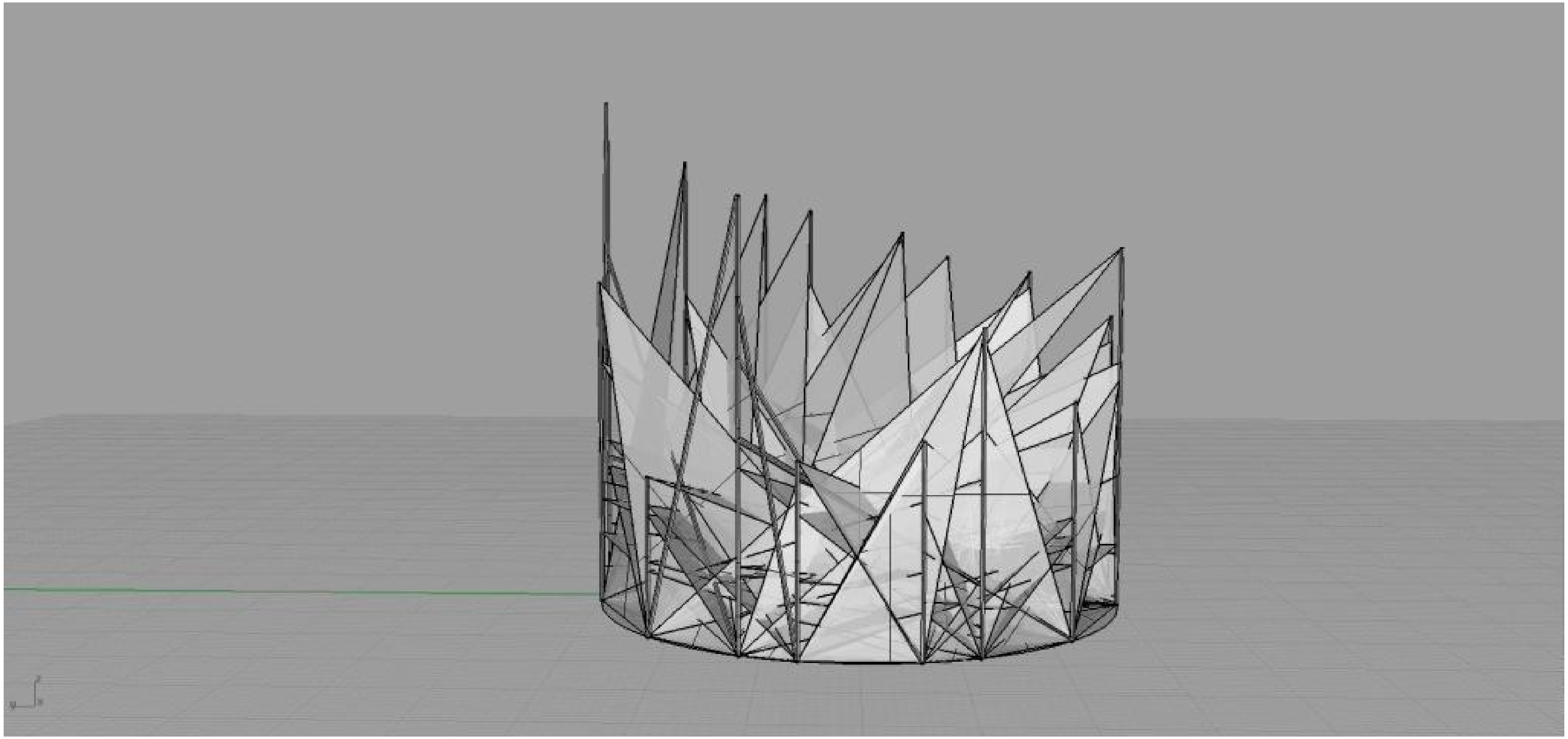
4n + 1



4n + 3



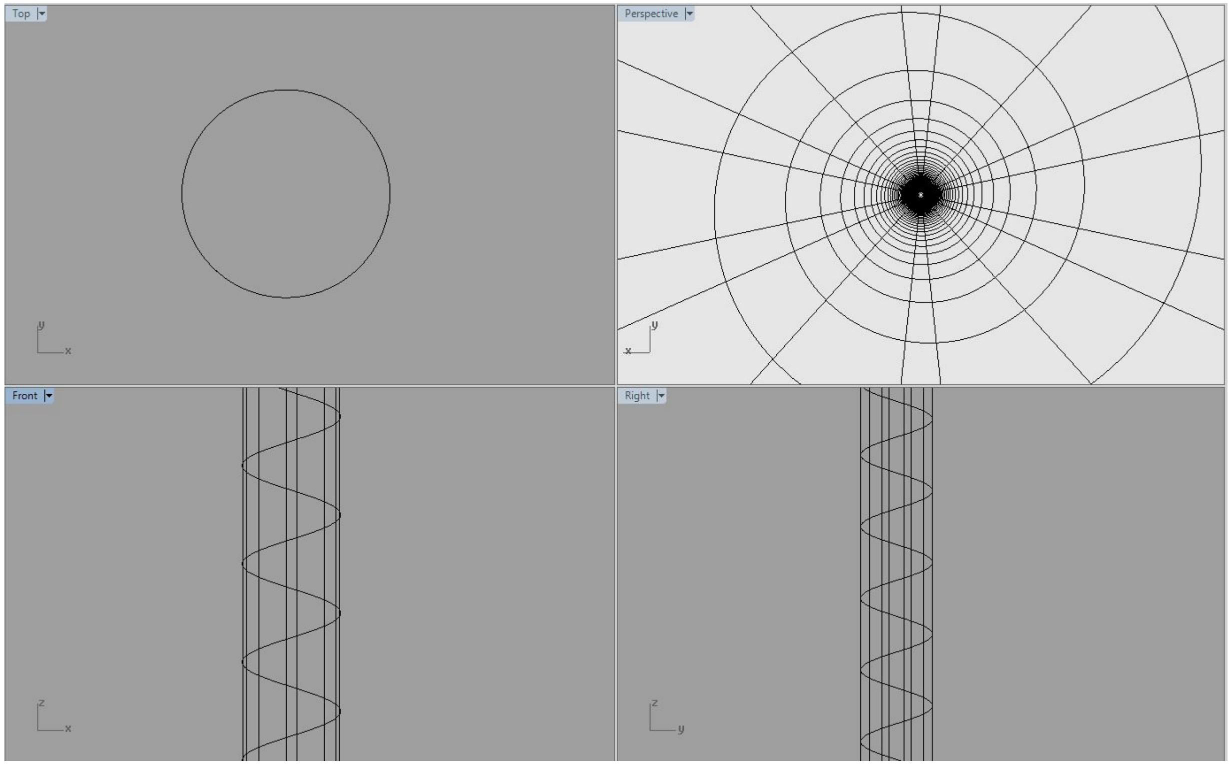
3D-Strukturen



3D-Strukturen

- Für die 3D-Darstellung werden die Vielfachen von 60 betrachtet.
- In einer 3-dimensionalen Darstellung wird der Kreis (x-, y-Achse) zur Helix.

  Dabei liegen die Elemente einer primen Restklasse auf je einer Geraden parallel zur z-Achse.
- Eine 360° Drehung auf der Helix entspricht somit einer Addition von 60 zum vorherigen Restklassenelement.
- Die Anzahl der Umdrehungen entspricht den Vielfachen von 60.



Die interaktive Installation
klingende 2D Symmetrien & 3D-Strukturen

- **Blickt man nun von unten in die Helix hinein, wird sie in einer scheinbaren Unendlichkeit zu einem Punkt (perspektivischer Fluchtpunkt) und erscheint dem Betrachter als Spirale.**
- **Durch Bewegen auf der z-Achse rotiert diese Spirale und die Restklassen verweilen an der gleichen Stelle.**
- **Verbindet man nun die Faktoren (prime Restklassenelemente) nicht nur im 2-Dimensionalen miteinander, sondern zusätzlich mit ihrem Produkt im 3-Dimensionalen (höher hinauf auf der z-Achse in der jeweils zugehörigen Restklasse), ergeben sich im Raum liegende Dreiecke und aus deren Überlagerungen interessante Raumstrukturen.**
- **Jede Zahl in den primen Restklassen, die in dieser Darstellung nicht oberste Ecke eines solchen Dreiecks ist, ist Primzahl und erzeugt einen Ton.**

Obertonreihe und die natürlichen Zahlen

- **Die Reihe der natürlichen Zahlen erzeugt musikalisch die Obertonreihe.**
- **Die sogenannten Flageoletts sind z.B. an den ganzzahligen Saitenteilungen erzeugbar.**
- **So, wie die Primzahlen die Bausteine der ganzen Zahlen sind, erzeugen sie in der Musik die Intervalle.**
- **Nur die Primzahlen erzeugen <u>neue</u> Intervalle.**
- **Primzahlprodukte entsprechen der Kombination der Intervalle.**
- **In dieser Installation werden die Primzahlen hörbar gemacht und die Primzahlprodukte visualisiert.**

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit