Die Collatz-Vermutung Untersuchung von Oliver Niemöller 2022/23

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{für } x \bmod 2 \equiv 0 \\ 3x+1 & \text{für } x \bmod 2 \equiv 1 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{N} \text{ (ohne 0)}$$

Jede gerade natürliche Zahl wird durch 2 geteilt, jede ungerade natürliche Zahl wird mit 3 multipliziert und 1 addiert. Alle natürlichen Zahlen enden in der Schleife 4, 2, 1.

Betrachten wir was uns gegeben ist:
3x+1 ist Multiplikation mit 3 und Addition von 1.
Mit 3x+1 sind uns die Restklassen mod 3 gegeben, denn 1+3n ist die Definition für R_1 mod 3.
Folglich fehlen noch 2+3n = R_2 mod 3, und 3+3n = R_3 mod 3.
Im Folgenden werde ich 3n, 3n+1 und 3n+2 als Synonym für die Restklassen mod 3 benutzen und als Form bezeichnen, wohingegen 3x+1 eine konkrete Zahl ist. n, x $\in \mathbb{N}_0$

/ 2 ist Division, / 2^n ist wiederholte Division.

3n+1 als fraktales Muster

Hierzu vertauschen wir für die bessere Übersicht am besten die beiden Summanden zu 1 + 3n und lassen n wachsen.
$1+3\cdot n$
$1+3\cdot 0 = 1$
$1+3\cdot 1 = 4$
$1+3\cdot 2 = 7$
$1+3\cdot 3 = 10$
$1+3\cdot 4 = 13$
...
Mit n = 4 erscheint n das erste Mal selber in der Form 3n+1, sodass man 13 auch schreiben kann als :
$13 = 1+3\cdot 4 = 1+3\cdot(3m+1)$ für $m \in \mathbb{N}$
13 selber ist auch von der Form 1+3n und $3^0 + 3^1 + 3^2$.
Die Potenzen von 3 sind die Modulowerte von 3.
Rückwirkend kann man nun 10 schreiben als
$10 = 1+3\cdot 3 = 1+3\cdot(3m+0)$
und weiter
$16 = 1+3\cdot 5 = 1+3\cdot(3m+2)$

Dieses Prinzip des Ersetzens setzt sich als Muster endlos fort und beschreibt sämtliche Zahlen 3n+1 in 3er Gruppen.
$19 = 1+3\cdot 6 = 1+3\cdot(3m+3) = 1+3\cdot(3m+(3l+0))$ für $l \in \mathbb{N}$
$22 = 1+3\cdot 7 = 1+3\cdot(3m+4) = 1+3\cdot(3m+(3l+1))$
...
Die Quersumme der Zahlen gibt Auskunft über die Gruppe, die durch die ersten drei 3n+1 (1, 4, 7) gegeben sind. Denn 10 ist in der Quersumme 1, 13 ist in der Quersumme 4 und 16 ist in der Quersumme 7.
Genauso wie die Quersummen 3, 6 oder 9 die Teilbarkeit mit 3 angeben, sagen die Quersummen 2, 5, 8 über die Zahl aus, dass sie von der Form 3n+2 ist.

Wir haben also 3 Gruppen von Zahlen, die sich jeweils in 3 Gruppen aufspalten.
Dies setzt sich als Muster in allen natürlichen Zahlen unendlich fort.
Setzt man in der ersten Ersetzung m nicht gleich 1 sondern 0, ergibt sich folgendes:
$1+3\cdot(3m+0) = 1$
$1+3\cdot(3m+1) = 4$
$1+3\cdot(3m+2) = 7$
Deswegen ist die 7 ein Spezialfall, der eine Sonderstellung einnimmt. Die 7 ist auf diese besondere Art die erste Zahl der Form 3n+2.

Wichtig bei der Betrachtung der Collatz Iteration ist, dass wir dieses Phänomen im Dezimalsystem betrachten.

Zahlensystemische Überlegungen

Wir betrachten dieses Phänomen im Dezimalsystem und somit in der Logik bzw. den Gesetzmäßigkeiten dieses Systems. Im Binärsystem $2 = 10_2$ bedeutet Multiplikation mit 2 bspw. das Anfügen einer 0, was im Dezimalsystem etwas anderes bedeutet (Multiplikation mit $2\cdot5$). Es gibt noch andere wesentliche Unterschiede. Dennoch haben das Binärsystem und das Dezimalsystem Gemeinsamkeiten, was die Bedingungen des Systems sind:

	$10-1 = (2n+1)^2$	$10 \bmod 2 \equiv 0$	$10+1$ ist prim
binär	1^2		$3_{10} = 11_2$
dezimal	3^2		11_{10}

Betrachten wir die Elemente der Vermutung, so ist das erste $3x+1 = 2^2 = 4^1$, für das beide Iterationsvorschriften aufeinander treffen. Wir können das Ganze also auch im 10_4 System betrachten. Hier sind nur zwei Bedingungen des Systems mit denen von Binär- und Dezimalsystem gemeinsam.

10_4-1 ist prim	$10_4 \bmod 2 \equiv 0$	10_4+1 ist prim
3	2^2	5

Ein weiterer Unterschied ist, dass 10_4 selbst ein Quadrat einer natürlichen (geraden) Zahl ist. Betrachten wir dieses Quadrat genauer. Es lässt sich auf drei + eine Art darstellen:
$2+2$, $2\cdot2$, 2^2 und $3+1$, drei Ausdrücke mit 2 und einen mit 1 und 3.

Setzt man die Systematik von Binär- und Dezimalsystem fort, ergeben sich folgende weitere Zahlensysteme: 10_{82} , 10_{226} , 10_{441} , 10_{1091} , … , allgemein: $10_m = (6n\pm3)^2 + 1$, wenn 11_m prim ist.
Das Dezimalsystem basiert also auf $3\cdot3 +1 = 3^2 +1 = 3\cdot x +1$ für $x = 3$.

Die Systeme benötigen entsprechend viele unterschiedliche (einstellige) Symbole zur Darstellung. Jede 10 erhält im nächst höheren System ein eigenes neues Symbol. So wird 10_2 zur 2, die im Binärsystem als Symbol nicht enthalten ist (0,1). Das Dezimalsystem besteht aus 10 Symbolen: 0 bis 9.

Das Trinärsystem hat 3 Symbole 0, 1, 2 .

$10-1$ ist prim	$10 = 2n+1$,	$10+1$ ist gerade Quadratzahl.
2	3	2^2

Damit unterscheidet sich das System im Wesentlichen durch Negation der Bedingungen des Binärsystems, also dadurch, dass 10 ungerade ist und 10+1 die Quadratzahl und gerade ist und 10-1 die gerade Primzahl.

Das Quartärsystem 10_4 hat 4 Symbole: 0, 1, 2, 3.
Betrachten wir die Symbole des Quartärsystems aus der Sicht des Binärsystems, so ist:
$1 = 2^0$, $2 = 2^0 + 2^0 = 2^1$, $3 = 2^0 + 2^1$

Zwischen dem System 10_4 und 10_{10} liegen die beiden Primzahlen 5 und 7. 5 ist als 11_4 mit den Symbolen des Binärsystems (0,1) darstellbar. Für die 7 ist die erste 3 notwendig, der 13 im Quartärsystem.

$7_{10} = 13_4 = 21_3 = 111_2$
Dies ist die erste überhaupt mögliche 13, die zusätzlich 3n+1 ist, mit Quersumme 10_4 / 1.

$7_{10} = 2^0 + 2^1 + 2^2 = 111_2$

Nun haben wir als Exponenten die möglichen Modulowerte von 3 als Exponenten der 2, die gleichzeitig die Symbole des Systems 10_3 sind.

$13_{10} = 3^0 + 3^1 + 3^2 = 111_3$
Hier haben wir als Exponenten die möglichen Modulowerte von 3 als Exponenten der 3.
Führen wir das weiter:
$111_4 = 21_{10} = 3 \cdot 7$ $111_{10} = 3 \cdot 37$
$333_4 = 63_{10} = 3 \cdot 21 = 3^2 \cdot 7$ $999_{10} = 3^3 \cdot 37$

Ein System aus dem Produkt der Primzahlen bis 10_{10} ergibt zwar die Modulowerte von 3 rückwärts als 10er Potenzen, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$,
entspricht aber nicht den Bedingungen des Zahlensystems der 2 und 10. 211 ist zwar prim und $210 \bmod 2 \equiv 0$, aber 209 ist $11 \cdot 19$ und kein ungerades Quadrat.

Bezieht man die 11, die allen Systemen gemeinsam ist, mit ein, ergeben sich die Symbole des Quartärsystems, die gleichzeitig die Modulowerte von 4 sind als Potenzen von 10.

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ Hier gilt das gleiche für das System wie für 210, denn 2310 ± 1 ist prim.

Diese Zusammenhänge spielen später noch eine entscheidende Rolle, auf die wir noch zurückkommen werden, denn wir betrachten das Quartärsystem in Kombination mit dem Trinärsystem aus dem Blickwinkel des Dezimalsystems.

Reverse Iteration

Wenn die Kollatz-Vermutung stimmt, muss sie sich aus dem Unendlichen betrachtet als Muster darstellen lassen. Dazu betrachten wir die Umkehrung der Iteration.

In der Umkehrung erhalten wir:
Subtraktion von 1 und Division durch 3.
Multiplikation mit 2 bzw. 2^n. Es ergeben sich $2^{2n} = 4^n$ und 2^{2n+1}.
Beginnen wir die inverse Iteration beim Ziel 1 und sehen, wie sich das Gegebene konstelliert und ob wir alle Zahlen erreichen.

Zunächst ist aber noch wichtig, dass $1 = n^0$ ist, inklusive 0^0 , also nach der 0 gemeinsamer Anfang aller Zahlensysteme:

$1 = 1^0 , 2^0 , 3^0 , 4^0 , 10^0 , ...$

$1 \cdot 2 = 2$	$2 = 3n+2$		
$2 \cdot 2 = 4 = 4^1$	$4 = 3n+1$	$(4-1)/3 = 1$	$1 = 3n+1$
$4 \cdot 2 = 8$	$8 = 3n+2$		
$8 \cdot 2 = 16 = 4^2$	$16 = 3n+1$	$(16-1)/3 = 5$	$5 = 3n+2$
$16 \cdot 2 = 32$	$32 = 3n+2$		
$32 \cdot 2 = 64 = 4^3$	$64 = 3n+1$	$(64-1)/3 = 21$	$21 = 3n$
$64 \cdot 2 = 128$	$32 = 3n+2$		
$128 \cdot 2 = 256 = 4^4$	$256 = 3n+1$	$(256-1)/3 = 85$	$85 = 3n+1$
$256 \cdot 2 = 512$	$32 = 3n+2$		
$512 \cdot 2 = 1024 = 4^5$	$1024 = 3n+1$	$(1024-1)/3 = 341$	$341 = 3n+2$
$1024 \cdot 2 = 2048$	$2048 = 3n+2$		
$2048 \cdot 2 = 4096 = 4^6$	$4096 = 3n+1$	$(4096-1)/3 = 1365$	$1365 = 3n$
$4096 \cdot 2 = 8192$	$8192 = 3n+2$		
$8192 \cdot 2 = 16384 = 4^7$	$16384 = 3n+1$	$(16384-1)/3 = 5461$	$5461 = 3n+1$

…

$4^8 = 65536$	$(65536 -1)/3 = 21845$	$21845 = 3n+2$
$4^9 = 262144$	$(262144-1)/3 = 87381$	$87381 = 3n$
$4^{10} = 1048576$	$(1048576-1)/3 = 349525$	$349525 = 3n+1$
$4^{11} = 4194304$	$(4194304-1)/3 = 1398101$	$1398101 = 3n+2$
$4^{12} = 16777216$	$(16777216-1)/3 = 5592405$	$5592405 = 3n$
$4^{13} = 67108864$	$(67108864-1)/3 = 22369621$	$22369621 = 3n+1$

…

Alle 2er Potenzen führen zur Schleife 4, 2, 1. Jedoch nur Zahlen der Form 2^{2n} sind von der Form 3n+1.
4^n sind also Zahlen der Form 3n+1 und kreieren mit inverser Iterationsvorschrift (z-1)/3 neue Zahlen der Form 3n+1, 3n+2 und 3n und zwar entsprechend der Potenz mod 3.

Ist der Exponent n von 4^n von der Form 3n+1 entsteht eine Zahl der Form 3n+1.
Ist der Exponent n von 4^n von der Form 3n+2 entsteht eine Zahl der Form 3n+2.
Ist der Exponent n von 4^n von der Form 3n entsteht eine Zahl der Form 3n.

Die entstehenden ungeraden Zahlen sind die Folge der Summe der 4er-Potenzen $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n$.
Diese Folge beginnt mit 0 und lautet: S_4 = { 0, 1, 5, 21, 85, 341, 1365, 5461, 21845, …}

Weiter stellen wir fest, dass Zahlen der Form 3n+2 durch die Multiplikation mit 2 zu Zahlen der Form 3n+1 werden. Dies gilt nicht nur für gerade Zahlen, sondern allgemein, als Ergebnis der Restklassenmultiplikation mod 3. $R_2 \times R_2 = R_1$, da $2 \varepsilon R_2$ ist.

Analog werden Zahlen der Form 3n+1 durch die Multiplikation mit 2 zu Zahlen der Form 3n+2, $R_1 \times R_2 = R_2$.

Zahlen der Form 3n+1 werden mit der Multiplikation mit $2^{2n} = 4^n$ wieder zu Zahlen der Form 3n+1.

Gerade Zahlen der Form $3n+1$ werden mit $(3x+1)\cdot 4^n$ wieder zu Zahlen der Form $3n+1$ und erzeugen für x Zahlen der Form $3n+1$, $3n+2$ und $3n$ in kontinuierlicher Abfolge des aufsteigenden Exponenten n.

Gerade Zahlen der Form $3n+1$ sind also Verzweigungspunkte, die Zahlen der Form $3n$, $3n+1$ und $3n+2$ mit den erneut aufsteigenden 4er Potenzen als Faktor erzeugen.

Alle Zahlen der Form $3n$ sind Elemente von R_3 mod 3 und bleiben bei Multiplikation mit 2^n Zahlen der Form $3n$, also Elemente von R_3 , da $R_3 \times R_2 = R_3$ und $R_1 \times R_3 = R_3$ und $R_3 \times R_3 = R_3$.
$2^n \bmod 3 \equiv 1$oder 2, aber niemals 0.
$2^n \bmod 3 \equiv 2$, für $n = 2m+1$, also $\varepsilon\ R_2$ und $2^n \bmod 3 \equiv 1$, für $n = 2m+2$, also $\varepsilon\ R_1$.

Betrachten wir die erste Zahl der Form $3x+1$, die aus unserer reversen Iteration entstand, 4^1, ist $x = 1$. $1 \cdot 4^n$ sind genau die 4er Potenzen. Sie sind allesamt gerade Zahlen der Form $3n+1$.

Alle Zahlen der Form $3n+2$ werden bei Multiplikation mit 2^{2n+1} oder $2\cdot 4^n$ zu geraden Zahlen der Form $3n+1$.

Betrachten wir also die ersten Zahlen der Form $3n+2$, die aus unserer reversen Iteration entstanden bei 4^2.
$2 = 3n+2$ und $5 = 3n+2$
$5\cdot 2^{2n+1} = 10 \cdot 4^n$ $\{10, 40, 160, 640, 2560, ...\}$

Dies sind alles gerade Zahlen der Form $3x+1$. Mit den aufsteigenden Potenzen von 4 (beginnend bei 0) ergibt sich für x die Form $3n$, $3n+1$, $3n+2$ in wiederkehrender Reihenfolge für ungerade Zahlen z. Nun scheiden aus der 3er Runde alle Zahlen z der Form $3n$ aus. (s.o)

Alle Zahlen z der Form $3n+1$, die aus $5\cdot 2^{2n+1}$ mit der reversen Iteration entstehen, erzeugen mit $z \cdot 4^n$ neue Zahlen der Form $3x+1$, die sich wieder in der 3er Schleife zu ungeraden Zahlen der Form $3n+1$, $3n+2$, $3n$ in wiederkehrender Reihenfolge verzweigen.

Zunächst sind aber all diese Zahlen z der Form $3n+1$ selbst ein Verzweigungspunkt als $3x+1$, wobei x mit aufsteigenden 4er Potenzen von der Form $3n+1$, $3n+2$, $3n$ als wiederkehrende Schleife ist.

Alle ungeraden Zahlen z der Form $3n+2$, die aus $5\cdot 2^{2n+1}$ entstehen, erzeugen mit $z\cdot 2^{2n+1} = z\cdot 2\cdot 4^n$ wieder neue gerade Zahlen der Form $3x+1$, deren x wieder mit aufsteigendem n zu ungeraden Zahlen der Form $3n+2$, $3n+1$, $3n$ in wiederkehrender Reihenfolge werden.

Dies ist wieder das fraktale Muster, das sich unendlich verzweigt.

In der ersten Iteration entsteht eine Abwandlung von S_4, die ich S_5 nenne.
$S_5 = S_4\{n\} \cdot 10 + 3$ $S_5 = \{ 3, 13, 53, 213, 853, 3413, 13563, …\}$

Betrachten wir die nächste Zahl der Form $3x+1$, die aus unserer reversen Iteration entstand, 4^4, ist $x = 85$. ${4_{10}}^4 = {10_4}^{10}$
$85 \cdot 4^n$ sind wieder alles gerade Zahlen der Form $3x+1$. Mit den aufsteigenden Potenzen von 4 (beginnend bei 0) ergibt sich für x die Form $3n+1$, $3n+2$, $3n$ in wiederkehrender Reihenfolge.

(85-1)/3 = 28. 28 ist 3n+1.
(340-1)/3 = 113. 113 ist 3n+2.
(1360-1)/3 = 453. 453 ist 3n.
(5440-1)/3 = 1813. 1813 ist 3n+1.
…

Hier erscheint das erste mal eine gerade Zahl als neues x von 3x+1 einer geraden Zahl. Mit 3n+1 als Exponent von 4 sind die neuen x gerade.

Aus unserem neuen 3n+1 (28) lässt sich wieder als 3x+1 ein x bestimmen (9).
Aus unserem neuen 3n+2 (113) lässt sich wieder durch Multiplikation mit 2 ein neues gerades 3x+1gewinnen (226) und daraus wieder ein x bestimmen (75). 453 ist wieder 3n.
Auch hier wiederholt sich das fraktale Muster von 3n+1, 3n+2, 3n.

Betrachten wir die nächste Zahl der Form 3x+2 (Exponent 5), die aus unserer reversen Iteration entstand, 4^5, ist x = 341. Wir benötigen wieder die Multiplikation mit 2^{2n+1} .

$341\cdot2^{2n+1} = 682 \cdot 4^n$

Dies sind wieder alles gerade Zahlen der Form 3x+1.

(682-1)/3 = 227	227 ist 3n+2
(2728-1)/3 = 909	909 ist 3n
(10912-1)/3 = 3637	3637 ist 3n+1

Auch hier wiederholt sich das fraktale Muster. Nur startet diesmal x mit der Form 3n+2.
War das erste x bei $5\cdot2^{2n+1}$ von der Form 3n, so ist es bei $(4^5-1)/3 = 341\cdot2^{2n+1}$ von der Form 3n+2 und bei $(4^8-1)/3 = 14563\cdot2^{2n+1}$ ist es von der Form 3n+1.
Auch dieses absteigende Muster wiederholt sich in diesem Zyklus für 4^{3n+2} .

Vergrößert man nun den Blick auf die 4er Potenzen unter dem Aspekt der Restklassen mod 3, dann zeigt sich für 4^{3n}, 4^{3n+1}, 4^{3n+2} ein 3er Rhythmus für n, mit n = 3m, 3m+1, 3m+2:

QS = Quersumme

$(4^{3n}-1)/3 \bmod 3 \equiv 0$, für n = 3m+1 QS = 3, n = 3m+2 QS = 6, n = 3m QS = 9

$((4^{3n+1}-1)/3 -1)/3 \bmod 3 \equiv 0$ für n = 3m, $\equiv 1$ für n = 3m+1, $\equiv 2$ für n = 3m+2

$(((4^{3n+2}-1)/3)\cdot2 -1)/3 \bmod 3 \equiv 0$ für n = 3m, $\equiv 2$ für n = 3m+1, $\equiv 1$ für n = 3m+2

Man sieht, dass für 3n+2 die Folge absteigend ist ($-1 \bmod 3 \equiv 2$) und für 3n+1 aufsteigend.

Betrachten wir die 4er Potenzen und die ersten zwei reversen Iterationsschritte im Überblick mit 3n, 3n+1 und 3n+2 als Formulierung des Exponenten jeweils mod 3, so erscheint S_4 in drei neuen Variationen mit der Zuordnung der Elemente von S_4 zu 3n, 3n+1 und 3n+2. Das fraktale Muster setzt sich auch hier fort mit S_4 und einer Drittelung von S_4 in der zweiten Iteration.

	4^n	$(4^n-1)/3$	mod3	$((4^{3n+1}-1)/3-1)/3$	mod3
	3n+1	S_4		$(((4^{3n+2}-1)/3)\cdot 2-1)/3$	
n = 0					
4^{3n}	1	0	0		
4^{3n+1}	4	1	1	0	0
4^{3n+2}	16	5	2	3	0
n = 1					
4^{3n}	64	21	0		
4^{3n+1}	256	85	1	28	1
4^{3n+2}	1024	341	2	227	2
n = 2					
4^{3n}	4096	1365	0		
4^{3n+1}	16384	5461	1	1820	2
4^{3n+2}	65536	21845	2	14563	1
n = 3					
4^{3n}	262144	87381	0		
4^{3n+1}	1048576	349525	1	116508	0
4^{3n+2}	4194304	1398101	2	932067	0
n = 4					
4^{3n}	16777216	5592405	0		
4^{3n+1}	67108864	22369621	1	7456540	1
4^{3n+2}	268435456	89478485	2	59652323	2
n = 5					
4^{3n}	1073741824	357913941	0		
4^{3n+1}	4294967296	1431655765	1	477218588	2
4^{3n+2}	17179869184	5726623061	2	3817748707	1
n = 6					
4^{3n}	68719476736	22906492245	0		
4^{3n+1}	274877906944	91625968981	1	30541989660	0
4^{3n+2}	1099511627776	366503875925	2	244335917283	0
n = 7					
4^{3n}	4398046511104	1466015503701	0		
4^{3n+1}	17592186044416	5864062014805	1	1954687338268	1
4^{3n+2}	70368744177664	23456248059221	2	15637498706147	2
n = 8					
4^{3n}	281474976710656	93824992236885	0		
4^{3n+1}	1125899906842624	375299968947541	1	125099989649180	2
4^{3n+2}	4503599627370496	1501199875790165	2	1000799917193443	1
n = 9					
4^{3n}	18014398509481984	6004799503160661	0		
4^{3n+1}	72057594037927936	24019198012642645	1	8006399337547548	0
4^{3n+2}	288230376151711744	96076792050570581	2	64051194700380387	0
…					

Die geraden Zahlen der letzten Spalte bei 3n+1 sind $\sum_{n=0}^{\infty} 7\cdot 4^{3n+1}$,

die ungeraden Zahlen der letzten Spalte bei 3n+2 sind $3+\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot 7\cdot 4^{3n+2}$,

die 4^{3n} in der zweiten Spalte sind $\sum_{n=0}^{\infty} 3\cdot 7\cdot 4^{3n}$.

Es werden also in gleichem Maße in allen Verzweigungen Zahlen der Form 3n, 3n+1 und 3n+2 erzeugt.

Bei der kontinuierlichen Zerlegung mit der reversen Iteration führen alle 4^n zu 3n, mit einer Ausnahme: 4^7.
4^7 führt über die 7 zur 1.

(16384-1)/3 = 5461	(3n+1)
(5461-1)/3 = 1820	(3n+2)
1820 · 2 = 3640	(3n+1)
(3640-1)/3 = 1213	(3n+1)
(1213-1)/3 = 404	(3n+2)
404 · 2 = 808	(3n+1)
(808-1)/3 = 269	(3n+2)
269 · 2 = 538	(3n+1)
(538-1)/3 = 179	(3n+2)
179 · 2 = 358	(3n+1)
(358-1)/3 = 119	(3n+2)
119 · 2 = 238	(3n+1)
(238-1)/3 = 79	(3n+1)
(79-1)/3 = 26	(3n+2)
26 · 2 = 52	(3n+1)
(52-1)/3 = 17	(3n+2)
17 · 2 = 34	(3n+1)
(34-1)/3 = 11	(3n+2)
11 · 2 = 22	(3n+1)
(22-1)/3 = 7	(3n+1)
(7-1)/3 = 2	(3n+2)
2 · 2 = 4	(3n+1)
(4-1)/3 = 1	

Dies liegt daran, dass 1+3·(3m+2) = 7 für m = 0 der Übergang vom Quartärsystem zum Dezimalsystem ist, weil -3 mod 10 ≡ 7.
Im Dezimalsystem wird m = 1 in dieser Form. 1+3·(3m+3) = 1+3·(3·1+(3l+0)) = 10 für l = 0.

${10_4}^{13} = {10_4}^{(10+3)} = {4_{10}}^{(10-3)}$, die Grenze zwischen Quartär und Dezimalsystem, $7_{10} = 13_4$

$$\frac{\frac{(10_4^{13}-1)}{3}-1}{3}=(10_4^1+10_4^{(3+1)})\cdot 13_4=(10_4^1+10_4^{10})\cdot 13_4=130130_4=(4_{10}^1+4_{10}^4)\cdot 7_{10}=(4_{10}+256_{10})\cdot 7_{10}=1820_{10}$$

Beginnend mit n = 1 für $4^{3n+1} = 4^4 = {10_4}^{10}$ beginnt beim zweiten reversen Iterationsschritt die Reihe von geraden Zahlen aus der Summe von $28 \cdot 4^{3n+1}$. $28_{10} = 10_4 \cdot 13_4$
Mit n = 2 für 4^{3n+1} ist $4^7 = {10_4}^{13}$, und n = 3 für 4^{3n+1} ist ${4_{10}}^{10} = {10_4}^{22}$ entspricht wieder 4^1 , da 10 mod 3 ≡ 1.

Damit werden alle Zahlen in den Restklassen mod 3 erzeugt. Schleifen sind nicht möglich, da die Primzahlzerlegung von $(4^n-1)/3$ immer anders ist und somit alle Zahlen der weiteren Verzweigungen auch eine eindeutige Primzahlzerlegung haben.

Die Kollatz-Vermutung stimmt also. 21.04.2023