Die Goldbachsche Vermutung
Untersuchung von Oliver Niemöller 07/2023

1. Das Problem

Im Jahre 1742 schrieb der preussische Mathematiker Christian Goldbach (1690 – 1764) in einem Brief an Euler:

"Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl größer als zwei, ein aggretum trium numerorum primorum sey."

Euler replizierte, dass sich nach seiner Kenntnis jede natürliche, gerade Zahl $n \geq 6$ als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellen lasse.

In der Literatur findet man für die Goldbachsche Vermutung vorwiegend folgende Form:

(G) $n = p_1 + p_2$ ist lösbar mit ungeraden $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$ für jedes gerade natürliche $n \geq 6$.
(U) $N = p_1 + p_2 + p_3$ ist lösbar mit ungeraden $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}$ für jedes ungerade natürliche $N \geq 9$.

mit $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl}\}$.
Die Vermutung (G) wird auch als starke oder strenge Goldbachsche Vermutung bezeichnet, da aus ihr (U) folgt:
wenn $N - 3 = p_1 + p_2$ für ungerades $N \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch
$N = p_1 + p_2 + 3$.

Zitiert aus Konstantin Fackeldey in „Die Goldbachsche Vermutung und ihre bisherigen Lösungsversuche“, Freie Universität Berlin, 2002

Alle im folgenden benutzten Variablen (n, i, A) sind natürliche Zahlen inklusive 0. p mit oder ohne Index bezeichnet immer eine Primzahl.

2. Vorüberlegungen

2.1 Die Primzahlen

Ungerade Primzahlen schaffen Lücken (Leere) indem sie Lücken (Leere) füllen.
Die 2 mit all ihren Potenzen schafft durch Teilung Lücken im einen Ganzen, dem Unendlichen, die von der 3 mit all ihren Potenzen in allen möglichen multiplikativen Kombinationen mit den 2er Potenzen gefüllt werden, um neue Lücken zu lassen, die nur durch die weiteren Primzahlen mit den multiplikativen Kombinationen gefüllt werden können.
So entstehen die natürlichen Zahlen in einem sich ständig ändernden Muster von Lücken, das mit größer werdenden Primzahlen zunehmend Kontinuität in der Reihe der natürlichen Zahlen aufweist und im Unendlichen erst geschlossen wird.
Die Emergenz der Primzahlen ist nicht-linear und nicht-algorithmisch.
Die ungeraden Primzahlen besetzen immer Lücken zwischen 4n und 4n+2 oder umgekehrt.

2.2 Die Addition

In der Addition unterscheidet man die beteiligten Zahlen mit verschiedenen Namen. Zu einer Grundzahl (Anzahl, Größe), dem Augend - der Zahl, die vermehrt wird - wird eine weitere Grundzahl, der Addend, hinzugefügt. Das Ergebnis wird als Summe bezeichnet.
In der Negation der Addition oder auch Subtraktion wird von einer Grundzahl (Anzahl, Größe), dem Minuend eine weitere Grundzahl, der Subtrahend, weggenommen und erzeugt eine neue Grundzahl (Anzahl/Größe), die Differenz.
Damit die beteiligten Zahlen wieder erscheinen, wird die Summe der Addition zum Minuend.
Die Inversion der Addition ist das Vergleichen.

3 + 4 = 7	Augend + Addend = Summe (Addition)
7 - 4 = 3	Minuend – Subtrahend = Differenz (Subtraktion)
7 | 3 = 4	Summe | Augend = Abstand (Vergleich)

Im ersten Fall ist die 3 die passive, „erleidende" Zahl, der Augend. Der Augend ist der, dem hinzugefügt wird.
Die 4 ist der Addend, die aktiv hinzufügende Zahl. Die Art der Verknüpfung, die Rechenart, - hier die Addition - gehört immer zur aktiven Zahl. 3 + alleine macht keinen Sinn. 3 schon. Also gehört das + zur 4, die etwas mit der 3 macht.
Die 7 ist das Ergebnis aus beidem, etwas Neues, Eigenes, aber Passives, da es in keiner Verknüpfung steht; die Summe aus Augend und Addend, eine größere passive Anzahl.

Im zweiten Fall, der Negation der Addition, der Subtraktion, wird der Addend 4 negiert. D.h. seine aktive gerichtete Kraft wird in der Richtung umgekehrt. Die Kraft der Zahl bleibt die gleiche. Es wird der Operator, die Verknüpfung, negiert. Aus + wird -. Die 4 bleibt die 4. In der Verbindung der 4 mit dem Operator (–) wird aus dem Addend ein Subtrahend des Minuenden, dem Ergebnis 7 der ursprünglichen Rechnung. Er wird vom Ergebnis weg-genommen und es entsteht wieder unsere passive Grundzahl 3.

Im dritten Fall vergleichen wir das passive Ergebnis 7 mit der passiven Zahl 3 und kommen zu dem Unterschied 4. Jetzt betrachten wir, was die beiden passiven Zahlen miteinander verbindet und nicht was die aktive Zahl mit einer der beiden passiven Zahlen macht. Deswegen ist in der Symbolschreibweise das Minus senkrecht gestellt. Der Unterschied ist gleichzeitig eine Gemeinsamkeit, da von beiden passiven Zahlen aus gesehen der Abstand 4 ist.
Es benötigt Aktivität mit einer bestimmten Energie, um den Abstand zu überbrücken. Der Abstand ist das Ergebnis des unterscheidenden Vergleichens.

Dies wird im folgenden der wichtige Aspekt.

3. Der Lösungsansatz

Der Abstand (A) zweier ungerader Primzahlen ist immer eine gerade Zahl. Für den Fall $p_1 = p_2$ ist auch 0 eine gerade Zahl.

$p_2 - p_1 = A = 2n$

Die kleinere Primzahl p_1 + Abstand ist p_2 , $p_1 + A = p_2$

sodass $2 \cdot p_1$ + Abstand zu $p_1 + p_2$ wird.

$p_1 + A + p_1 = p_1 + p_2$ oder $2 \cdot p_1 + A = 2 \cdot p_1 + 2n = p_1 + p_2$

Es reicht also alle Abstände der ungeraden Primzahlen als Folge FA zu definieren.

FA: 0, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2, 12, 12, 4, 2, 4, 6, 2, 10, 6, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 10, 14, 4, 2, 4, 14, 6, 10, 2, 4, 6, 8, 6, 6, 4, 6, 8, 4, 8, 10, 2, 10, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 12, 8, 4, 8, 4, 6, 12, 2, 18, 6, 10, 6, 6, 2, 6, 10, 6, 6, 2, 6, 6, 4, 2, 12, 10, 2, 4, 6, 6, 2, 12, 4, 6, 8, 10, 8, 10, 8, 6, 6, 4, 8, 6, 4, 8, 4, 14, 10, 12, 2, 10, 2, 4, 2, 10, 14, 4, 2, 4, 14, 4, 2, 4, 20, 4, 8, 10, 8, 4, 6, 6, 14, 4, 6, 6, 8, 6, 12, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 10, 2, 10, 2, 6, 18, 4, 2, 4, 6, 6, 8, 6, 6, 22, 2, 10, 8, 10, 6, 6, 8, 12, 4, 6, 6, 2, 6, 12, 10, 18, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 12, 2, 6, 34, 6, 6, 8, 18, 10, 14, 4, 2, 4, 6, 8, 4, 2, 6, 12, 10, 2, 4, 2, 4, 6, 12, 12, 8, 12, 6, 4, 6, 8, 4, 8, 4, 14, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 6, 10, 20, 6, 4, 2, 24, 4, 2, 10, 12, 2, 10, 8, 6, 6, 6, 18, 6, 4, 2, 12, 10, 12, 8, 16, 14, 6, 4, 2, 4, 2, 10, 12, 6, 6, 18, 2, 16, 2, 22, 6, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 6, 10, 2, 10, 14, 10, 6, 12, 2, 4, 2, 10, 12, 2, 16, 2, 6, 4, 2, 10, 8, 18, 24, 4, 6, 8, 16, 2, 4, 8, 16, 2, 4, 8, 6, ...

Mit 3 beginnend ist der erste Abstand zur 3 genau 0, von 3 zu 5 ist er 2, von 5 zu 7 ist er 2, von 7 zu 11 ist er 4, etc..
Die ausschließlich geraden Zahlen werden mit der abnehmenden Häufigkeit (Dichte) der Primzahlen immer größer.
Diese Folge gehorcht dem nicht-linearen und dem nicht-algorithmischen Emergenzverhalten der Primzahlen, ist

unendlich lang und ohne wiederkehrende Muster. Als unendliche Zahl hintereinander geschrieben, wäre es eine transzendente Zahl.

3.1 Summenbildung in FA

Bildet man nun von jeder Primzahl ausgehend unendliche Summen entlang dieser Folge und betrachtet die Zwischenergebnisse wieder als Folgenglieder, so ist jede Folge anders. Anders ausgedrückt: Man beginnt für jede unendliche Summe ein Glied der Folge FA später mit der Summierung. Dies entspricht dem Fortschreiten zur nächsten Primzahl für die nächste Folge.

$$F3=\sum_{i=0}^{\infty} FA_i \;,\quad F5=\sum_{i=1}^{\infty} FA_i \;,\quad F7=\sum_{i=2}^{\infty} FA_i \;,\quad F11=\sum_{i=3}^{\infty} FA_i \;,\ldots$$

Beginnend bei 3 als Augend ergibt sich bei der Aufsummierung der Folgenglieder von FA die Folge F3. Von Augend 3 zu Summe 3 ist der Abstand 0. Deswegen beginnt F3, wie auch jede andere aus FA abgeleitete Folge, mit 0.

F3: 0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 28, 34, 38, 40, 44, 50, 56, 58, 64, 68, 70, 76, 80, 86, 94, 98, 100, 104, 106, 110, 124, 128, 134, 136, 146, 148, 154, 160, 164, 170, 176, 178, 188, 190, 194, 196, 208, 220, 224, 226, 230, 236, 238, 248, 254, 260, 266, 268, 274, 278, 280, 290, 304, 308, 310, 314, 328, 334, 344, 346, 350, 356, 364, 370, 376, 380, 386, 394, 398, 406, 416, 418, 428, 430, 436, 440, 446, 454, 458, 460, 464, 476, 484, 488, 496, 500, 506, 518, 520, 538, 544, 554, 560, 566, 568, 574, 584, 590, 596, 598, 604, 610, 614, 616, 628, 638, 640, 644, 650, 656, 658, 670, 674, 680, 688, 698, 706, 716, 724, 730, 736, 740, 748, 754, 758, 766, 770, 784, 794, 806, 808, 818, 820, 824, 826, 836, 850, 854, 856, 860, 874, 878, 880, 884, 904, 908, 916, 926, 934, 938, 944, 950, 964, 968, 974, 980, 988, 994, 1006, 1010, 1016, 1018, 1028, 1030, 1036, 1046, 1048, 1058, 1060, 1066, 1084, 1088, 1090, 1094, 1100, 1106, 1114, 1120, 1126, 1148, 1150, 1160, 1168, 1178, 1184, 1190, 1198, 1210, 1214, 1220, 1226, 1228, 1234, 1246, 1256, 1274, 1276, 1280, 1286, 1288, 1294, 1298, 1300, 1304, 1316, 1318, 1324, 1358, 1364, 1370, 1378, 1396, 1406, 1420, 1424, 1426, 1430, 1436, 1444, 1448, 1450, 1456, 1468, 1478, 1480, 1484, 1486, 1490, 1496, 1508, 1520, 1528, 1540, 1546, 1550, 1556, 1564, 1568, 1576, 1580, 1594, 1598, 1604, 1606, 1610, 1616, 1618, 1624, 1634, 1654, 1660, 1664, 1666, 1690, 1694, 1696, 1706, 1718, 1720, 1730, 1738, 1744, 1750, 1756, 1774, 1780, 1784, 1786, 1798, 1808, 1820, 1828, 1844, 1858, 1864, 1868, 1870, 1874, 1876, 1886, 1898, 1904, 1910, 1928, 1930, 1946, 1948, 1970, 1976, 1984, 1990, 1994, 1996, 2000, 2008, 2014, 2024, 2026, 2036, 2050, 2060, 2066, 2078, 2080, 2084, 2086, 2096, 2108, 2110, 2126, 2128, 2134, 2138, 2140, 2150, 2158, 2176, 2200, 2204, 2210, 2218, 2234, 2236, 2240, 2248, 2264, 2266, 2270, 2278, 2284, …

Man sieht sehr schön, wie Lücken in der Abfolge der geraden Zahlen entstehen. Nicht vorhanden sind in der Abfolge 6, 12, 18, 22, 24, …
In der Folge F3 sind nach 6 alle geraden Zahlen definiert, die aus der Summe von 3 und einer größeren Primzahl entstehen.

$p_1 + A + p_1 = p_1 + p_2$ $\quad (A + p_1) = p_2$
3+(0+3)=6, 3+(2+3)=8, 3+(4+3)=10, 3+(8+3)=14, ...

F5 beginnt mit dem Abstand 0 zur 5, 2 zur 7, 6 zur 11, etc.
Die Folge F5 füllt einige der Lücken von F3, so wie die 5 mit ihren Potenzen die entstehenden Lücken aller Kombinationen von $2^n \cdot 3^m$ füllt, um Lücken für die weiteren Primzahlen zu schaffen. F5 weist andere Lücken in der Abfolge der geraden Zahlen auf als F3, weil die Folge FA weder linear noch algorithmisch ist.

Eine Verschiebung um ein Folgeglied verändert die gesamte Struktur dieser neuen Folge. Dies trifft auf jedes Folgenglied als Anfang einer neuen Folge zu.

F5: 0, 2, 6, 8, 12, 14, 18, 24, 26, 32, 36, 38, 42, 48, 54, 56, 62, 66, 68, 74, 78, 84, 92, 96, 98, 102, 104, 108, 122, 126, 132, 134, 144, 146, 152, 158, 162, 168, 174, 176, 186, 188, 192, 194, 206, 218, 222, 224, 228, 234, 236, 246, 252, 258, 264, 266, 272, 276, 278, 288, 302, 306, 308, 312, 326, 332, 342, 344, 348, 354, 362, 368, 374, 378, 384, 392, 396, 404, 414, 416, 426, 428, 434, 438, 444, 452, 456, 458, 462, 474, 482, 486, 494, 498, 504, 516, 518, 536, 542, 552, 558, 564, 566, 572, 582, 588, 594, 596, 602, 608, 612, 614, 626, 636, 638, 642, 648, 654, 656, 668, 672, 678, 686, 696, 704, 714, 722, 728, 734, 738, 746, 752, 756, 764, 768, 782, 792, 804, 806, 816, 818, 822, 824, 834, 848, 852, 854, 858, 872, 876, 878, 882, 902, 906, 914, 924, 932, 936, 942, 948, 962, 966, 972, 978, 986, 992, 1004, 1008, 1014, 1016, 1026, 1028, 1034, 1044, 1046, 1056, 1058, 1064, 1082, 1086, 1088, 1092, 1098, 1104, 1112, 1118, 1124, 1146, 1148, 1158, 1166, 1176, 1182, 1188, 1196, 1208, 1212, 1218, 1224, 1226, 1232, 1244, 1254, 1272, 1274, 1278, 1284, 1286, 1292, 1296, 1298, 1302, 1314, 1316, 1322, 1356, 1362, 1368, 1376, 1394, 1404, 1418, 1422, 1424, 1428, 1434, 1442, 1446, 1448, 1454, 1466, 1476, 1478, 1482, 1484, 1488, 1494, 1506, 1518, 1526, 1538, 1544, 1548, 1554, 1562, 1566, 1574, 1578, 1592, 1596, 1602, 1604, 1608, 1614, 1616, 1622, 1632, 1652, 1658, 1662, 1664, 1688, 1692, 1694, 1704, 1716, 1718, 1728, 1736, 1742, 1748, 1754, 1772, 1778, 1782, 1784, 1796, 1806, 1818, 1826, 1842, 1856, 1862, 1866, 1868, 1872, 1874, 1884, 1896, 1902, 1908, 1926, 1928, 1944, 1946, 1968, 1974, 1982, 1988, 1992, 1994, 1998, 2006, 2012, 2022, 2024, 2034, 2048, 2058, 2064, 2076, 2078, 2082, 2084, 2094, 2106, 2108, 2124, 2126, 2132, 2136, 2138, 2148, 2156, 2174, 2198, 2202, 2208, 2216, 2232, 2234, 2238, 2246, 2262, 2264, 2268, 2276, 2282, ...

F5 beschreibt alle Zahlen, die aus $2 \cdot 5 + A$ als Summe zweier ungerader Primzahlen dargestellt werden können. In F3 und F5 fehlt z.B. die Zahl 22. Also wird die Reihe der geraden Zahlen kontinuierlich nur bis 20 von F3 und F5 zusammen dargestellt. F7 enthält die 22 und komplettiert damit die 2er Reihe bis 86.

88 ist aber erst in F13 enthalten, sodass F11 erst Lücken über 110 schließt. Dies zeigt die Nichtlinearität der Primzahlen und ihrer Abstände.

<u>These 1</u>

Mit allen (unendlich vielen) möglichen Folgen Fp_i werden alle geraden Zahlen beschrieben. Nach und nach füllen sich die Lücken in den Folgen und im Unendlichen haben wir alle 2n.
Die Lücken entstehen an einer Stelle oder Index der Folge. Vergleicht man diesen Index mit dem Index der aufsteigenden geraden Zahlen, so wird die Lücke in einer weiteren Folge immer mit einem niedrigeren Index geschlossen.

Die erste Lücke in F3, die 6, steht an dritter Stelle in F5, wäre aber Index 4 der geraden Zahlen, da diese mit 0 beginnen. 22 steht an siebter Stelle in F7 wäre aber Index 12 der geraden Zahlen. 88 steht an 21. Stelle in F13, wäre aber Index 45 der geraden Zahlen, etc..

Eine XOR Addition aller Folgen würde die mehrfach Nennung der Zahlen verhindern und lässt im Unendlichen die geschlossene 2er Reihe entstehen.

$$\sum_{i=0}^{\infty} FA_i \text{ xor } \sum_{i=1}^{\infty} FA_i \text{ xor } \sum_{i=2}^{\infty} FA_i \text{ xor } \sum_{i=3}^{\infty} FA_i \text{ xor } \ldots = 2n$$

für $n = 0 \rightarrow \infty$

<u>3.2 These 2</u>

Die möglichen geraden Zahlen ($p_1 + p_2$ oder $2 \cdot p_1 + A$) aller Folgen schließen die Lücken, die F3 lässt, so wie die Primzahlen die Lücken der 2er Potenzen und ihrer Vorgänger schließen, um neue Lücken für ihre Nachfolger zu lassen.

Die erste Lücke bei F3 ist die 12 zwischen 10 und 14. 9 ist keine Primzahl (3·3). Der Abstand 6 fehlt deswegen. Darum kann die Folge F3 als $p_1 + p_2$ keine 12 formulieren. Es gibt unendlich viele weitere Lücken, auch größere. Sie werden nach und nach durch die weiteren Folgen geschlossen. F5 schließt die Lücke 12 mit 5+(2+5) und füllt auch weitere auf, lässt aber Lücken für die nachfolgenden Folgen.
Die nächste Lücke, die F5 in der 2er-Reihe lässt, ist die 30. Sie wird von F7 gefüllt mit 7+(16+7). F7 schließt auch weitere Lücken ganz und teilweise und lässt als nächste Lücke in der 2er-Reihe die 98. Nun zeigt sich wieder die Nichtlinearität der Emergenz der Primzahlen und ihrer Abstände. Denn F11, F13 und F17 füllen zwar viele Lücken, sind aber nicht in der Lage 98 zu formulieren. Erst F19 ist dazu in der Lage. Mit der „Vorarbeit" der vorhergehenden Folgen lässt F19 die Lücke bei 220. Nicht jede Folge schließt die niedrigste Lücke, die die vorherige Folge gelassen hat. Die Abstände der niedrigsten Lücken variieren nicht-algorithmisch. Nachfolgend die niedrigsten Lücken, die die Folgen F3 bis F103 lassen:

F3 12	F47 992
F5 30	F53 992
F7 98	F59 992
F11 98	F61 992
F13 98	F67 992
F17 98	F71 992
F19 220	F73 2642
F23 308	F79 2642
F29 308	F83 2642
F31 556	F89 2642
F37 556	F97 2642
F41 556	F101 2642
F43 556	F103 5372

Primzahlen sind immer 6n±1. Zweimal eine Primzahl ist 12n±2.
Weil 12 = 4n ist, ist 2·p = 4n+2

Der Abstand A zwischen zwei ungeraden Primzahlen ist entweder 4n oder 4n+2. Gerade Zahlen der Form 4n+2 entstehen mit A = 4n oder 2·p + 4n, gerade Zahlen der Form 4n entstehen mit A = 4n+2 oder 2·p + (4n+2).
FA beginnt mit 0, 2, 2, zwei Primzahlzwillingen, 3 und 5, 5 und 7. Damit sind 4n+2 und 4n angelegt. Jeder nachfolgende Primzahlzwilling, also dem Abstand 2, verändert die Summe der Abstände, von 4n zu 4n+2 oder umgekehrt, ebenso wie alle anderen 4n+2. Die Zwillinge sind jedoch immer wieder nötig, um die größer werdenden Abstände kontinuierlich füllen zu können, da in der Progression der Folgen Fp_i die niedrigeren Zwillinge nach und nach verschwinden. Deshalb muss es unendlich viele Primzahlzwillinge geben. Die Abfolge von 4n+2 und 4n unterliegt genauso dem nicht-linearen und nicht-algorithmischen Emergenzverhalten der Primzahlen. Da die Primzahlen aber alle Lücken füllen, füllen auch die Abstände aller Primzahlen alle Lücken in der 2er-Reihe.

Zur schwachen Goldbachschen Vermutung
Zieht man von einer ungeraden Zahl eine ungerade Primzahl ab, bleibt eine gerade Zahl. Diese lässt sich wie oben beschrieben in zwei ungerade Primzahlen als Summe zerlegen.
Für den einstelligen Bereich müsste man die 1 als Primzahl zulassen, damit die Idee von Goldbach verwirklicht werden kann, dass jede Zahl größer zwei als Summe von drei Primzahlen dargestellt werden kann.
3=1+1+1,   4=1+3=1+2+1,   5=1+3+1,   6=2+2+2=1+2+3
7= 3+1+3=2+2+3=1+5+1,   8=3+2+3=1+2+5,
9=1+3+5=3+3+3=2+5+2

Jede gerade Zahl lässt sich immer als Summe von einer geraden Zahl und zweier ungeraden Zahlen darstellen, sodass
$2 + G = 2 + p_1 + p_2$
Damit sind auch alle geraden Zahlen als Summe von drei Primzahlen darstellbar.