

**Formeln für die Entwicklung
der Perioden von Kehrwerten für
Zahlen mit den Endziffern 1, 3, 7, 9**

von Oliver Niemöller

Formeln für die Kehrwerte von Zahlen mit Endziffer (EZ) 1 und 9

EZ 9

Für alle Zahlen z mit der Endziffer 9 ($z \bmod 10 = 9$) sind die letzten beiden Stellen der Kehrwertperiode $(z+2) \bmod 100$. Die letzte Stelle ist immer 1.

Zum Aufbau der Periode von rechts nach links gibt es mindestens zwei Möglichkeiten. Bei beiden wird eine unendliche Summe gebildet.

Version 1

Beispiel $z = 29$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z+1)}{10} \right)^n \cdot 10^n$$

$$\frac{(z+1)}{10} = (29+1)/10 = 3$$

Die Multiplikation mit 10^n rückt die Zahl in der Addition jeweils um eine Stelle nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 3^0 \cdot 10^0 = 1 \\ + 3^1 \cdot 10^1 = 30 \\ + 3^2 \cdot 10^2 = 900 \\ + 3^3 \cdot 10^3 = 27000 \\ + 3^4 \cdot 10^4 = 810000 \\ \dots \\ + 3^{28} \cdot 10^{28} = \\ \dots \end{array}$$

... 0344827586206896551724137931

Version 2

Beispiel $z = 79$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z+1)}{10} \right)^2 \right]^n \cdot (z+2) \cdot 10^{2n}$$

$$\left(\frac{(z+1)}{10} \right)^2 = ((79+1)/10)^2 = 8^2 = 64$$

$$z+2 = 81$$

Die Multiplikation mit 10^{2n} rückt die Zahl in der Addition jeweils um zwei Stellen nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 64^0 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 0} = \\ + 64^1 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 1} = \\ + 64^2 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 2} = \\ + 64^3 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 3} = \\ + 64^4 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 4} = \\ + 64^5 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 5} = \\ + 64^6 \cdot 81 \cdot 10^{2 \cdot 6} = \end{array} \begin{array}{r} 81 \\ 518400 \\ 3317760000 \\ 21233664000000 \\ 1358954496000000000 \\ 8697308774400000000000 \\ 55662776156160000000000000 \end{array}$$

...

... 01265822784810126582278481

Für $z > 100$ ist $\left(\frac{(z+1)}{10} \right)^2 > z$.

Dann gilt ebenso eine Variation der Version 2:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z+1)}{10} \right)^2 - z \right]^n \cdot \left(\frac{(z+1)}{10} \right) \cdot 10^{2n}$$

EZ 1

Für alle Zahlen z mit der Endziffer 1 ($z \bmod 10 = 1$) sind die letzten beiden Stellen der Kehrwertperiode $(z-2) \bmod 100$. Die letzte Stelle ist immer 9.

Zum Aufbau der Periode von rechts nach links gibt es auch hier mindestens zwei Möglichkeiten. Bei beiden wird wieder eine unendliche Summe gebildet.

Version 1

Beispiel $z = 21$:

$$\frac{(z-1)}{10} - 1 = ((21-1)/10) - 1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z-1)}{10} - 1 \right) \cdot 9 + 10 \right]^n \cdot 9 \cdot 10^n$$

$$1 \cdot 9 + 10 = 19$$

Die Multiplikation mit 10^n rückt die Zahl in der Addition jeweils um eine Stelle nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 19^0 \cdot 9 \cdot 10^0 = 9 \\ + 19^1 \cdot 9 \cdot 10^1 = 1710 \\ + 19^2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 324900 \\ + 19^3 \cdot 9 \cdot 10^3 = 61731000 \\ + 19^4 \cdot 9 \cdot 10^4 = 11728890000 \\ + 19^5 \cdot 9 \cdot 10^5 = 2228489100000 \\ \dots \end{array}$$

... 047619 047619 047619 047619

Version 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z-1)}{10} \right)^2 \right]^n \cdot (z-2) \cdot 10^{2n}$$

Beispiel $z = 41$:

$$\left(\frac{(z-1)}{10} \right)^2 = ((41-1)/10)^2 = 4^2 = 16$$

$$z - 2 = 39$$

Die Multiplikation mit 10^{2n} rückt die Zahl in der Addition jeweils um zwei Stellen nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 16^0 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 0} = 39 \\ + 16^1 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 1} = 62400 \\ + 16^2 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 2} = 99840000 \\ + 16^3 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 3} = 159744000000 \\ + 16^4 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 4} = 255590400000000 \\ + 16^5 \cdot 39 \cdot 10^{2 \cdot 5} = 4089446400000000000 \\ \dots \end{array}$$

... 02439 02439 02439 024390243902439

Zahlen mit den Endziffern 1 und 9 hängen zusammen.

$$9 \bmod 10 = 9 = -1 \text{ und } 1 \bmod 10 = 1 = -9.$$

Ebenso verhält es sich bei den Endziffern 3 und 7.

$$3 \bmod 10 = 3 = -7 \text{ und } 7 \bmod 10 = 7 = -3.$$

EZ 3

Für alle Zahlen z mit der Endziffer 3 ($z \bmod 10 = 3$) sind die letzten beiden Stellen der Kehrwertperiode $36 - (z \bmod 100)$. Die letzte Stelle ist immer 3.

Zum Aufbau der Periode von rechts nach links wird wieder eine unendliche Summe gebildet.

Beispiel $z = 53$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z-3)}{10} \right) \cdot 3 + 1 \right]^n \cdot 3 \cdot 10^n$$

$$36 - 53 = -17 \quad -17 \bmod 100 = 83$$

$$\frac{(z-3)}{10} \cdot 3 + 1 = ((53-3)/10) \cdot 3 + 1 = 5 \cdot 3 + 1 = 16$$

Die Multiplikation mit 10^n rückt die Zahl in der Addition jeweils um eine Stelle nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 16^0 \cdot 3 \cdot 10^0 = 3 \\ + 16^1 \cdot 3 \cdot 10^1 = 480 \\ + 16^2 \cdot 3 \cdot 10^2 = 76800 \\ + 16^3 \cdot 3 \cdot 10^3 = 12288000 \\ + 16^4 \cdot 3 \cdot 10^4 = 1966080000 \\ + 16^5 \cdot 3 \cdot 10^5 = 314572800000 \\ + 16^6 \cdot 3 \cdot 10^6 = 50331648000000 \\ + 16^7 \cdot 3 \cdot 10^7 = 8053063680000000 \\ + 16^8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 12884901888000000000 \\ + 16^9 \cdot 3 \cdot 10^9 = 2061584302080000000000 \\ + 16^{10} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 329853488332800000000000 \\ + 16^{11} \cdot 3 \cdot 10^{11} = 52776558133248000000000000 \\ \dots \end{array}$$

... 0188679245283 0188679245283

EZ 7

Für alle Zahlen z mit der Endziffer 7 ($z \bmod 10 = 7$) sind die letzten beiden Stellen der Kehrwertperiode $64 - (z \bmod 100)$. Die letzte Stelle ist immer 7.

Zum Aufbau der Periode von rechts nach links wird wieder eine unendliche Summe gebildet.

unendliche Summe gebildet.

Beispiel $z = 77$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(z-7)}{10} \right) \cdot 7 + 5 \right]^n \cdot 7 \cdot 10^n$$

$$64 - 77 = -13 \quad -13 \bmod 100 = 87$$

$$\frac{(z-7)}{10} \cdot 7 + 5 = ((77-7)/10) \cdot 7 + 5 = 7 \cdot 7 + 5 = 54$$

Die Multiplikation mit 10^n rückt die Zahl in der Addition jeweils um eine Stelle nach links.

Eingesetzt in die Formel ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 54^0 \cdot 7 \cdot 10^0 = 7 \\ + 54^1 \cdot 7 \cdot 10^1 = 3780 \\ + 54^2 \cdot 7 \cdot 10^2 = 2041200 \\ + 54^3 \cdot 7 \cdot 10^3 = 1102248000 \\ + 54^4 \cdot 7 \cdot 10^4 = 595213920000 \\ + 54^5 \cdot 7 \cdot 10^5 = 321415516800000 \\ + 54^6 \cdot 7 \cdot 10^6 = 173564379072000000 \\ \vdots \end{array}$$

... 012987 012987 012987 012987012987

Für EZ 3 und 7 gibt es auch Lösungen, bei denen um 2 Stellen nach links gerückt wird. Jedoch habe ich bisher keine Formel dafür gefunden. (Stand Okt. 2019)

Bei allen Formn fehlt die Division durch $10^{(n+1)}$ bzw. $10^{2(n+1)}$ zum Erzeugen und Rücken nach rechts vom Komma.

Kontakt:
Oliver Niemoeller
Dominicusstr. 38
10827 Berlin

+49 - 163 - 913 88 45
on@oliver-niemoeller.de