Die Goldbachsche Vermutung
Untersuchung von Oliver Niemöller 07/2023-31.03./25

1. Das Problem

Im Jahre 1742 schrieb der preussische Mathematiker Christian Goldbach (1690 − 1764) in einem Brief an Euler:

"Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl größer als zwei, ein aggretum trium numerorum primorum sey."

Euler replizierte, dass sich nach seiner Kenntnis jede natürliche, gerade Zahl $n \geq 6$ als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellen lasse.

In der Literatur findet man für die Goldbachsche Vermutung vorwiegend folgende Form:

(G) $n = p1 + p2$ ist lösbar mit ungeraden $p1, p2 \in \mathbb{P}$ für jedes gerade natürliche $n \geq 6$.

(U) $N = p1 + p2 + p3$ ist lösbar mit ungeraden $p1, p2, p3 \in \mathbb{P}$ für jedes ungerade natürliche $N \geq 9$.

mit $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl}\}$.

Die Vermutung (G) wird auch als starke oder strenge Goldbachsche Vermutung bezeichnet, da aus ihr (U) folgt:

wenn $N - 3 = p1 + p2$ für ungerades $N \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch

$N = p1 + p2 + 3$.

Zitiert aus Konstantin Fackeldey in „Die Goldbachsche Vermutung und ihre bisherigen Lösungsversuche“, Freie Universität Berlin, 2002

Alle im folgenden benutzten Variablen (n, i, A) sind natürliche Zahlen inklusive 0. p mit oder ohne Index bezeichnet immer eine Primzahl.

2. Vorüberlegungen

2.1 Fundamentalsatz der Zahlentheorie

Definition 2.1 Eine ganze Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur die trivialen Teiler ± 1, $\pm p$ hat. Die Menge aller ganzzahligen Primzahlen wird durch P bezeichnet.

Lemma 2.1 $p \in \mathbb{P} \wedge p|a \cdot b \Rightarrow p|a \vee p|b$

Satz 2.1 (Fundamentalsatz der Zahlentheorie) Jede natürliche Zahl n lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Bemerkung 2.2 Jede natürliche Zahl n läßt sich daher auch durch

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P},\, p|n}^{\infty} p^{(\nu_p(n))}$$

repräsentieren, wobei $\nu_p(n)$ die Vielfachheit von $p \in P$ in n bezeichnet. Definiert man für jene $p \in P$ mit p teilt nicht n $\nu_p(n) = 0$, so erhält man auch formal das unendliche Produkt

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}}^{\infty} p^{(\nu_p(n))}$$

zitiert aus Skriptum (pdf) zur Vorlesung von Prof. Michael DRMOTA, TU Wien

2.2 Die Emergenz der Primzahlen

Tun wir so, als hätten wir die Menge der natürlichen Zahlen mit allen unendlich vielen Zahlen als Leerstellen, die durch die aufsteigenden Primzahlen und ihre multiplikativen Kombinationen gefüllt werden. Wir beginnen mit der 2, der ersten Primzahl.
Die 2 mit all ihren Potenzen schafft eine erste Struktur von besetzten Leerstellen innerhalb dieser Menge (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...). Zwischen diesen besetzten Leerstellen entstehen Lücken mit nichtbesetzten Leerstellen im Unendlichen der natürlichen Zahlen.

Die 2 mit all ihren Potenzen schafft also Lücken im einen Ganzen, dem Unendlichen, die von der 3 mit all ihren Potenzen in allen möglichen multiplikativen Kombinationen mit den 2er Potenzen gefüllt werden, um neue Lücken zu lassen, die nur durch die weiteren Primzahlen und deren Potenzen mit den multiplikativen Kombinationen mit den Vorgängern gefüllt werden können.
(1, 3, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36, ...)
Die ungeraden Primzahlen mit ihren Potenzen und Multiplikationen mit den vorhergehenden Primzahlen und ihren Potenzen schaffen Lücken (Leerstellen bleiben leer) indem sie Lücken (Leerstellen) füllen. Die Lückenstruktur ändert sich mit jeder größeren Primzahl und die kontinuierliche Reihe der natürlichen Zahlen schließt sich mit unregelmäßig wachsenden Abschnitten. Mit 2 entsteht die Reihe bis 2, mit 3 bis 4, mit 5 bis 6, mit 7 bis 10, mit 11 bis 12, mit 13 bis 16, usw. Das Anwachsen der Reihe der natürlichen Zahlen ist also synchron mit dem Abstand aufeinanderfolgender Primzahlen.
So entstehen die natürlichen Zahlen in einem sich ständig ändernden Muster von Lücken, das mit größer werdenden Primzahlen zunehmend Kontinuität in der Reihe der natürlichen Zahlen aufweist und im Unendlichen erst geschlossen wird.
Die Emergenz der Primzahlen ist deswegen nicht-linear und nicht-algorithmisch.

Die ungeraden Primzahlen besetzen immer Lücken zwischen 4n und 4n+2 oder umgekehrt.

3. Der Lösungsansatz

Der Abstand (A) zweier ungerader Primzahlen ist immer eine gerade Zahl. Auch 0 ist für den Fall p1 = p2 eine gerade Zahl.

p2 - p1 = A = 2n

Die kleinere Primzahl p1 + Abstand ist p2 , p1 + A = p2,

sodass 2 · p1 + Abstand zu p1 + p2 wird.

p1 + (A + p1) = p1 + p2 oder 2 · p1 + A = 2 · p1 + 2n = p1 + p2

Es reicht also alle Abstände der ungeraden Primzahlen als Folge FA zu definieren.

FA: 0, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2, 12, 12, 4, 2, 4, 6, 2, 10, 6, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 10, 14, 4, 2, 4, 14, 6, 10, 2, 4, 6, 8, 6, 6, 4, 6, 8, 4, 8, 10, 2, 10, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 12, 8, 4, 8, 4, 6, 12, 2, 18, 6, 10, 6, 6, 2, 6, 10, 6, 6, 2, 6, 6, 4, 2, 12, 10, 2, 4, 6, 6, 2, 12, 4, 6, 8, 10, 8, 10, 8, 6, 6, 4, 8, 6, 4, 8, 4, 14, 10, 12, 2, 10, 2, 4, 2, 10, 14, 4, 2, 4, 14, 4, 2, 4, 20, 4, 8, 10, 8, 4, 6, 6, 14, 4, 6, 6, 8, 6, 12, 4, 6, 2, 10, 2, 6, 10, 2, 10, 2, 6, 18, 4, 2, 4, 6, 6, 8, 6, 6, 22, 2, 10, 8, 10, 6, 6, 8, 12, 4, 6, 6, 2, 6, 12, 10, 18, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 12, 2, 6, 34, 6, 6, 8, 18, 10, 14, 4, 2, 4, 6, 8, 4, 2, 6, 12, 10, 2, 4, 2, 4, 6, 12, 12, 8, 12, 6, 4, 6, 8, 4, 8, 4, 14, 4, 6, 2, 4, 6, 2, 6, 10, 20, 6, 4, 2, 24, 4, 2, 10, 12, 2, 10, 8, 6, 6, 6, 18, 6, 4, 2, 12, 10, 12, 8, 16, 14, 6, 4, 2, 4, 2, 10, 12, 6, 6, 18, 2, 16, 2, 22, 6, 8, 6, 4, 2, 4, 8, 6, 10, 2, 10, 14, 10, 6, 12, 2, 4, 2, 10, 12, 2, 16, 2, 6, 4, 2, 10, 8, 18, 24, 4, 6, 8, 16, 2, 4, 8, 16, 2, 4, 8, 6, ...

Mit 3 beginnend ist der erste Abstand zur 3 genau 0, von 3 zu 5 ist er 2, von 5 zu 7 ist er 2, von 7 zu 11 ist er 4, etc..
Die ausschließlich geraden Zahlen werden mit der abnehmenden Häufigkeit (Dichte) der Primzahlen immer größer.

Diese Folge gehorcht dem nicht-linearen und dem nicht-algorithmischen Emergenzverhalten der Primzahlen, ist unendlich lang und ohne wiederkehrende Muster. Als unendliche Zahl (Summe) hintereinander geschrieben, wäre es eine transzendente Zahl (t).

$$t = \sum_{i,n=0}^{\infty} FA_i^{-10n}$$

3.1 Summenbildung in FA

Bildet man nun von jeder Primzahl ausgehend unendliche Summen entlang dieser Folge und betrachtet die Zwischenergebnisse wieder als Folgenglieder, so ist jede Folge anders. Anders ausgedrückt: Man beginnt für jede unendliche Summe ein Glied der Folge FA später mit der Summierung. Dies entspricht dem Fortschreiten zur nächsten Primzahl für die nächste Folge.

$$F3 = \sum_{i=0}^{\infty} FA_i \,,\quad F5 = \sum_{i=1}^{\infty} FA_i \,,\quad F7 = \sum_{i=2}^{\infty} FA_i \,,\quad F11 = \sum_{i=3}^{\infty} FA_i \,,\ \cdots$$

Die neuen Folgen Fp_i enthalten jeweils alle Abstände zu den größeren Primzahlen.

Beginnend bei 3 als Augend ergibt sich bei der Aufsummierung der Folgenglieder von FA die Folge F3. Von Augend 3 zu Summe 3 ist der Abstand 0. Deswegen beginnt F3, wie auch jede andere aus FA abgeleitete Folge, mit 0.

F3: 0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 28, 34, 38, 40, 44, 50, 56, 58, 64, 68, 70, 76, 80, 86, 94, 98, 100, 104, 106, 110, 124, 128, 134, 136, 146, 148, 154, 160, 164, 170, 176, 178, 188, 190, 194, 196, 208, 220, 224, 226, 230, 236, 238, 248, 254, 260, 266, 268, 274, 278, 280, 290, 304, 308, 310, 314, 328, 334, 344, 346, 350, 356, 364, 370, 376, 380, 386, 394, 398, 406, 416, 418, 428, 430, 436, 440, 446, 454, 458, 460, 464, 476, 484, 488, 496, 500, 506, 518, 520, 538, 544, 554, 560, 566, 568, 574, 584, 590, 596, 598, 604, 610, 614, 616, 628, 638, 640, 644, 650, 656, 658, 670, 674, 680, 688, 698, 706, 716, 724, 730, 736, 740, 748, 754, 758, 766, 770, 784, 794, 806, 808, 818, 820, 824, 826, 836, 850, 854, 856, 860, 874, 878, 880, 884, 904, 908, 916, 926, 934, 938, 944, 950, 964, 968, 974, 980, 988, 994, 1006, 1010, 1016, 1018, 1028, 1030, 1036, 1046, 1048, 1058, 1060, 1066, 1084, 1088, 1090, 1094, 1100, 1106, 1114, 1120, 1126, 1148, 1150, 1160, 1168, 1178, 1184, 1190, 1198, 1210, 1214, 1220, 1226, 1228, 1234, 1246, 1256, 1274, 1276, 1280, 1286, 1288, 1294, 1298, 1300, 1304, 1316, 1318, 1324, 1358, 1364, 1370, 1378, 1396, 1406, 1420, 1424, 1426, 1430, 1436, 1444, 1448, 1450, 1456, 1468, 1478, 1480, 1484, 1486, 1490, 1496, 1508, 1520, 1528, 1540, 1546, 1550, 1556, 1564, 1568, 1576, 1580, 1594, 1598, 1604, 1606, 1610, 1616, 1618, 1624, 1634, 1654, 1660, 1664, 1666, 1690, 1694, 1696, 1706, 1718, 1720, 1730, 1738, 1744, 1750, 1756, 1774, 1780, 1784, 1786, 1798, 1808, 1820, 1828, 1844, 1858, 1864, 1868, 1870, 1874, 1876, 1886, 1898, 1904, 1910, 1928, 1930, 1946, 1948, 1970, 1976, 1984, 1990, 1994, 1996, 2000, 2008, 2014, 2024, 2026, 2036, 2050, 2060, 2066, 2078, 2080, 2084, 2086, 2096, 2108, 2110, 2126, 2128, 2134, 2138, 2140, 2150, 2158, 2176, 2200, 2204, 2210, 2218, 2234, 2236, 2240, 2248, 2264, 2266, 2270, 2278, 2284, …

Man sieht sehr schön, wie Lücken in der Abfolge der geraden Zahlen entstehen. Nicht vorhanden sind in der Abfolge 6, 12, 18, 22, 24, … weil 3 + 6 = 9 nicht Primzahl ist, etc.

In der Folge F3 sind alle geraden Zahlen ≥ 6 definiert, die aus der Summe von 3 und einer größeren Primzahl entstehen.

p1 + (A + p1) = p1 + p2 (A + p1) = p2
3+(0+3)=6, 3+(2+3)=8, 3+(4+3)=10, 3+(8+3)=14, 3+(10+3)=16, 3+(14+3)=20, ...

Mit F3 ist die Reihe der geraden Zahlen bis 10 einschließlich geschlossen. 12 entsteht erst durch F5. Die geraden Zahlen innerhalb der Folge F3 gehen aufsteigend kontinuierlich nur bis zur 4. F5 liefert erst die 6 (, 12, 18, …).

Beginnend bei 5 als Augend ergibt sich bei der Aufsummierung der Folgenglieder von FA die Folge F5. F5 beginnt mit dem Abstand 0 zur 5, 2 zur 7, 6 zur 11, etc. Die Folge F5 füllt einige der Lücken von F3, so wie die 5 mit ihren Potenzen die entstehenden Lücken aller Kombinationen von $2^n \cdot 3^m$ füllt, um Lücken für die weiteren Primzahlen zu schaffen/lassen.

F5 weist andere Lücken in der Abfolge der geraden Zahlen auf als F3, weil die Folge FA weder linear noch algorithmisch ist. Eine Verschiebung um ein Folgeglied verändert die gesamte Struktur dieser neuen Folge. Dies trifft auf jedes Folgenglied als Anfang einer neuen Folge zu.

In der Folge F5 sind alle geraden Zahlen ≤ 10 definiert, die aus der Summe von 5 und einer größeren Primzahl entstehen.

p1 + (A + p1) = p1 + p2 (A + p1) = p2
5+(0+5)=10, 5+(2+5)=12, 5+(6+5)=16, 5+(8+5)=18, 5+(12+5)=22, 5+(14+5)=24, …

Mit F5 ist die Reihe der geraden Zahlen bis 28 einschließlich geschlossen, da die Lücken 18, 24, 28 von F3 durch F5 geschlossen werden. 30 entsteht erst durch F7.

F5: 0, 2, 6, 8, 12, 14, 18, 24, 26, 32, 36, 38, 42, 48, 54, 56, 62, 66, 68, 74, 78, 84, 92, 96, 98, 102, 104, 108, 122, 126, 132, 134, 144, 146, 152, 158, 162, 168, 174, 176, 186, 188, 192, 194, 206, 218, 222, 224, 228, 234, 236, 246, 252, 258, 264, 266, 272, 276, 278, 288, 302, 306, 308, 312, 326, 332, 342, 344, 348, 354, 362, 368, 374, 378, 384, 392, 396, 404, 414, 416, 426, 428, 434, 438, 444, 452, 456, 458, 462, 474, 482, 486, 494, 498, 504, 516, 518, 536, 542, 552, 558, 564, 566, 572, 582, 588, 594, 596, 602, 608, 612, 614, 626, 636, 638, 642, 648, 654, 656, 668, 672, 678, 686, 696, 704, 714, 722, 728, 734, 738, 746, 752, 756, 764, 768, 782, 792, 804, 806, 816, 818, 822, 824, 834, 848, 852, 854, 858, 872, 876, 878, 882, 902, 906, 914, 924, 932, 936, 942, 948, 962, 966, 972, 978, 986, 992, 1004, 1008, 1014, 1016, 1026, 1028, 1034, 1044, 1046, 1056, 1058, 1064, 1082, 1086, 1088, 1092, 1098, 1104, 1112, 1118, 1124, 1146, 1148, 1158, 1166, 1176, 1182, 1188, 1196, 1208, 1212, 1218, 1224, 1226, 1232, 1244, 1254, 1272, 1274, 1278, 1284, 1286, 1292, 1296, 1298, 1302, 1314, 1316, 1322, 1356, 1362, 1368, 1376, 1394, 1404, 1418, 1422, 1424, 1428, 1434, 1442, 1446, 1448, 1454, 1466, 1476, 1478, 1482, 1484, 1488, 1494, 1506, 1518, 1526, 1538, 1544, 1548, 1554, 1562, 1566, 1574, 1578, 1592, 1596, 1602, 1604, 1608, 1614, 1616, 1622, 1632, 1652, 1658, 1662, 1664, 1688, 1692, 1694, 1704, 1716, 1718, 1728, 1736, 1742, 1748, 1754, 1772, 1778, 1782, 1784, 1796, 1806, 1818, 1826, 1842, 1856, 1862, 1866, 1868, 1872, 1874, 1884, 1896, 1902, 1908, 1926, 1928, 1944, 1946, 1968, 1974, 1982, 1988, 1992, 1994, 1998, 2006, 2012, 2022, 2024, 2034, 2048, 2058, 2064, 2076, 2078, 2082, 2084, 2094, 2106, 2108, 2124, 2126, 2132, 2136, 2138, 2148, 2156, 2174, 2198, 2202, 2208, 2216, 2232, 2234, 2238, 2246, 2262, 2264, 2268, 2276, 2282, ...

F5 beschreibt alle Zahlen, die aus $2 \cdot 5 + A$ als Summe zweier ungerader Primzahlen dargestellt werden können.
In F3 und F5 zusammen fehlt z.B. die Zahl (Abstand) 22. Also wird die Reihe der geraden Zahlen kontinuierlich nur bis 20 von F3 und F5 zusammen dargestellt.

F7 enthält die 22 und komplettiert damit die 2er Reihe bis 86 in den Abständen. 88 ist aber erst in F13 enthalten, sodass F11 erst Lücken über 110 schließt. Dies zeigt die Nichtlinearität der Primzahlen und ihrer Abstände.

F7: 0, 4, 6, 10, 12, 16, 22, 24, 30, 34, 36, 40, 46, 52, 54, 60, 64, 66, 72, 76, 82, 90, 94, 96, 100, 102, 106, 120, 124, 130, 132, 142, 144, 150, 156, 160, 166, 172, 174, 184, 186, 190, 192, 204, 216, 220, 222, 226, 232, 234, 244, 250, 256, 262, 264, 270, 274, 276, 286, 300, 304, 306, 310, 324, 330, 340, 342, 346, 352, 360, 366, 372, 376, 382, 390, 394, 402, 412, 414, 424, 426, 432, 436, 442, 450, 454, 456, 460, 472, 480, 484, 492, 496, 502, 514, 516, 534, 540, 550, 556, 562, 564, 570, 580, 586, 592, 594, 600, 606, 610, 612, 624, 634, 636, 640, 646, 652, 654, 666, 670, 676, 684, 694, 702, 712, 720, 726, 732, 736, 744, 750, 754, 762, 766, 780, 790, 802, 804, 814, 816, 820, 822, 832, 846, 850, 852, 856, 870, 874, 876, 880, 900, 904, 912, 922, 930, 934, 940, 946, 960, 964, 970, 976, 984, 990, 1002, 1006, 1012, 1014, 1024, 1026, 1032, 1042, 1044, 1054, 1056, 1062, 1080, 1084, 1086, 1090, 1096, 1102, 1110, 1116, 1122, 1144, 1146, 1156, 1164, 1174, 1180, 1186, 1194, 1206, 1210, 1216, 1222, 1224, 1230, 1242, 1252, 1270, 1272, 1276, 1282, 1284, 1290, 1294, 1296, 1300, 1312, 1314, 1320, 1354, 1360, 1366, 1374, 1392, 1402, 1416, 1420, 1422, 1426, 1432, 1440, 1444, 1446, 1452, 1464, 1474, 1476, 1480, 1482, 1486, 1492, 1504, 1516, 1524, 1536, 1542, 1546, 1552, 1560, 1564, 1572, 1576, 1590, 1594, 1600, 1602, 1606, 1612, 1614, 1620, 1630, 1650, 1656, 1660, 1662, 1686, 1690, 1692, 1702, 1714, 1716, 1726, 1734, 1740, 1746, 1752, 1770, 1776, 1780, 1782, 1794, 1804, 1816, 1824, 1840, 1854, 1860, 1864, 1866, 1870, 1872, 1882, 1894, 1900, 1906, 1924, 1926, 1942, 1944, 1966, 1972, 1980, 1986, 1990, 1992, 1996, 2004, 2010, 2020, 2022, 2032, 2046, 2056, 2062, 2074, 2076, 2080, 2082, 2092, 2104, 2106, 2122, 2124, 2130, 2134, 2136, 2146, 2154, 2172, 2196, 2200, 2206, 2214, 2230, 2232, 2236, 2244, 2260, 2262, 2266, 2274, 2280, ...

Mit F3, F5 und F7 sind in der 2er-Reihe mit den Additionen von ungeraden Primzahlen alle Zahlen bis 96 einschließlich kontinuierlich darstellbar. 98 ist erst mit F19 darstellbar. Mit F19 sind alle Zahlen der 2er-Reihe bis 218 formulierbar als Summe zweier ungeraden Primzahlen.

3.2 Thesen

These 1

Mit allen (unendlich vielen) möglichen Folgen Fp_i werden alle geraden Zahlen als Abstände beschrieben. Nach und nach füllen sich die Lücken in den Folgen und im Unendlichen haben wir alle 2n. Dadurch sind alle geraden Zahlen durch die Abstände der ungeraden Primzahlen zueinander darstellbar.

Die Lücken in der 2er Reihe entstehen an einer Stelle oder Index der Folge. Vergleicht man diesen Index mit dem Index der aufsteigenden geraden Zahlen, so wird die Lücke in einer weiteren Folge immer mit einem niedrigeren Index geschlossen.

Die erste Lücke in F3, die 6, steht an dritter Stelle in F5, wäre aber Index 4 der geraden Zahlen, da diese mit 0 beginnen. 22 steht an siebter Stelle in F7 wäre aber Index 12 der geraden Zahlen. 88 steht an 21. Stelle in F13, wäre aber Index 45 der geraden Zahlen, etc..

Eine XOR Addition aller Folgen würde die mehrfach Nennung der Zahlen verhindern und lässt im Unendlichen die geschlossene 2er Reihe entstehen.

$$\sum_{i=0}^{\infty} FA_i \text{ XOR } \sum_{i=1}^{\infty} FA_i \text{ XOR } \sum_{i=2}^{\infty} FA_i \text{ XOR } \sum_{i=3}^{\infty} FA_i \text{ XOR } \ldots = 2n$$

für $i = 0 \rightarrow \infty$

Dieses Füllen von Lücken entspricht der Emergenz der Primzahlen in der Multiplikation ihrer Potenzen mit den Vorgängern.

These 2

Die möglichen geraden Zahlen ($p_1 + p_2$ oder $2 \cdot p_1 + A$) aller Folgen FA_i schließen die Lücken der 2er Potenzen in der 2er Reihe oder besetzen sie.
So wie die ungeraden Primzahlen mit ihren Potenzen die Lücken der 2er Potenzen in der Multiplikation mit ihren Vorgängern schließen, um neue Lücken für ihre Nachfolger zu lassen schließen die Folgen FA_i die Lücken in der 2er Reihe als Summe von 2 ungeraden Primzahlen.

Die erste Lücke bei F3 ist die 12 zwischen 10 und 14. 9 ist keine Primzahl (3·3). Der Abstand 6 fehlt deswegen. Darum kann die Folge F3 als $p_1 + p_2$ keine 12 formulieren. Es gibt unendlich viele weitere Lücken, auch größere. Sie werden nach und nach durch die weiteren Folgen geschlossen. F5 schließt die Lücke 12 mit 5+(2+5) und füllt auch weitere auf, lässt aber Lücken für die nachfolgenden Folgen.

Die nächste Lücke, die F5 in der 2er-Reihe lässt, ist die 30. Sie wird von F7 gefüllt mit 7+(16+7). F7 schließt auch weitere Lücken ganz und teilweise und lässt als nächste Lücke in der 2er-Reihe die 98. Nun zeigt sich wieder die Nichtlinearität der Emergenz der Primzahlen. Denn F11, F13 und

F17 füllen zwar viele Lücken, sind aber nicht in der Lage 98 zu formulieren. Erst F19 ist dazu in der Lage. 19 + (60 + 19) = 98. Mit der „Vorarbeit“ der vorhergehenden Folgen lässt F19 die Lücke bei 220. Nicht jede Folge schließt die niedrigste Lücke, die die vorherige Folge gelassen hat. Die Abstände der niedrigsten Lücken variieren nicht-algorithmisch. Nachfolgend die niedrigsten Lücken, die die Folgen F3 bis F103 lassen:

F3 12	F47 992
F5 30	F53 992
F7 98	F59 992
F11 98	F61 992
F13 98	F67 992
F17 98	F71 992
F19 220	F73 2642
F23 308	F79 2642
F29 308	F83 2642
F31 556	F89 2642
F37 556	F97 2642
F41 556	F101 2642
F43 556	F103 5372

Selbst wenn nicht alle Folgen die Grenze der kontinuierlichen Darstellung in der 2er Reihe weiter verschieben, so sind doch die Sprünge bis zur nächsten Lücke schnell ansteigend. Die Zahl der Lücke ist immer größer als oder gleich $2p_i$, der Anfangszahl der Folge Fp_i.

4. Die geraden Zahlen

Primzahlen sind immer 6n±1. Zweimal eine Primzahl ist 12n±2. Weil 12 = 4n ist, ist 2·p = 4n+2
Der Abstand A zwischen zwei ungeraden Primzahlen ist entweder 4n oder 4n+2. Gerade Zahlen der Form 4n+2 entstehen mit A = 4n oder 2·p + 4n, gerade Zahlen der Form 4n entstehen mit A = 4n+2 oder 2·p + (4n+2).

FA beginnt mit 0, 2, 2, zwei Primzahlzwillingen, 3 und 5, 5 und 7.
Damit sind 4n+2 und 4n angelegt. Jeder nachfolgende Primzahlzwilling, also dem Abstand 2, verändert die Summe der Abstände, von 4n zu 4n+2 oder umgekehrt, ebenso wie alle anderen 4n+2. Die Zwillinge sind jedoch immer wieder nötig, um die größer werdenden Abstände kontinuierlich füllen zu können, da in der Progression der Folgen Fp_i die niedrigeren Zwillinge nach und nach verschwinden. Deshalb muss es unendlich viele Primzahlzwillinge geben. Die Abfolge von 4n+2 und 4n in den Abständen unterliegt genauso dem nicht-linearen und nicht-algorithmischen Emergenzverhalten der Primzahlen. Da die Primzahlen aber alle Lücken füllen, füllen auch die Abstände aller Primzahlen alle Lücken in der 2er-Reihe.

4.1 2er Potenzen als Summe von 2 ungeraden Primzahlen

Der kleinste Abstand zweier Primzahlen, die als Summe eine 2er Potenz bilden, ist immer ein Vielfaches von 3 entfernt zu 2^{n-1} zu beiden Seiten. Es gibt immer zwei Primzahlen der Form 2^{n-1}-3x und 2^{n-1}+3x, sodass $(2^{n-1}-3x) + (2^{n-1}+3x) = 2^n$.
Die 2er Potenzen gliedern sich in gerade (6n+4) und ungerade Potenzen (6n+2). Gerade Potenzen addieren sich als Summe von zwei Primzahlen der Form 6n-1 als kleinstmöglichen Abstand, ungerade addieren sich als Summe von zwei Primzahlen der Form 6n+1 als kleinstmöglichen Abstand. Der Abstand 1x ist nicht möglich, da eine der beiden Zahlen $2^{n-1} \pm 1 \bmod 3 \equiv 0$ ist.

Die Häufigkeit der Darstellungsmöglichkeit von $p1+p2=2^n$ nimmt mit zunehmenden Potenzen ab 2^7 rasant zu.

4.2 Die geraden Zahlen ausgedrückt mit 3 als Faktor

in 4.2 Verwendete Variablen

A, E, k, n, m, u, g, G, x sind natürliche Zahlen, A , E, k, n, m, x können auch 0 sein.

4.2.1 Feststellungen/Vorüberlegungen

Primzahlen sind immer ≡ ± 1 mod 6.
Die Hälfte einer geraden Zahl G ist entweder gerade (g=2n) oder ungerade (u=2n+1).

4.2.2 These: Symmetrie

Es gibt immer ein Paar von Primzahlen, das equidistant zu G/2 ist.

Egal, ob der minimale equidistante Abstand (E) zu G/2 gerade oder ungerade ist, der Abstand (A) der beiden resultierenden Primzahlen ist gerade, da er 2E ist. E ist kleiner als G/2.

Die Folge FA beinhaltet die möglichen Abstände von Primzahlen zueinander. Mit jeder Zahl beginnt eine neue unendliche Summe, für die gilt, dass

p1 + (A + p1) = 2(p1+A/2) = 2(p1+E) = G/2-E + G/2 +E = p1 + p2.
G/2 = (p1 + p2)/2 = p1+E = p2-E

Damit ist die Equidistanz zur Hälfte von geraden Zahlen durch Primzahlen gesichert.

Es geht ausschließlich darum, zu zeigen, dass für alle geraden Zahlen mindestens eine minimale Equidistanz zu zwei Primzahlen existiert. Primzahlkombinationen mit größerem Abstand sind zusätzlich möglich, aber nicht nötig.

4.3. Die geraden Zahlen als Ausdruck mit dem Faktor 3

Die geraden Zahlen ≥ 6 lassen sich mit dem Faktor 3 ausdrücken:
3*n+1 und 3*n-1 und 3*2n

3n+1 und 3n-1 sind nur dann gerade Zahlen, wenn n ungerade ist. Ist n gerade, ist 3n±1 ungerade.
Dabei unterscheiden sich 3n+1 und 3n-1 jeweils in 2 Fälle von geraden Zahlen:

ist n = 4m+1, dann ist (3n+1)/2 gerade und 3n+1 = 4k	3(4m+1) + 1 = 12m+4 = 12m+16
ist n = 4m+3, dann ist (3n+1)/2 ungerade und 3n+1 = 4k+2	3(4m+3) + 1 = 12m+10
ist n = 4m+1, dann ist (3n-1)/2 ungerade und 3n-1 = 4k+2	3(4m+1) - 1 = 12m+2 = 12m+14
ist n = 4m+3, dann ist (3n-1)/2 gerade und 3n-1 = 4k	3(4m+3) - 1 = 12m+8

Bei 3*2n unterscheiden sich auch 2 Fälle:

ist n = 4m, dann ist (3*4m)/2 gerade (3*2k)	3(4m) =12m
ist n = 4m+2, dann ist (3*(4m+2))/2 ungerade (3*(2k+1))	3(4m+2) =12m+6

Hieraus resultieren die 6 Folgen der Form 12m + 2x für x = 3, 4, 5, 6, 7, 8

Damit sind alle geraden Zahlen G beschrieben.

$G/2 = (12m + 2x) = 6m+x$

Es gilt nun für jede Folge ein E zu finden, sodass $((6m+x) \pm E) \bmod 6 \equiv \pm 1$

Der Abstand der beiden minimalen equidistanten Primzahlen zu G/2 ist für gerade G/2 ungerade und für ungerade G/2 gerade.

Mit 3 als Faktor gibt es 6 verschiedene Arten von geraden Zahlen mit unterschiedlichen minimalen Equidistanzen (E).

G/2 – E und G/2 + E sind dann prim, also p1 + p2 = G, wenn
$G/2 \pm E \bmod 6 \equiv \pm 1$ und
2*E = A, der Abstand zweier Primzahlen in der Folge Fp_i für p1 enthalten ist. Dabei ist $p1 \leq G/2$.

4.3.1 Die 6 Fälle im Einzelnen

1.
$G = 3*(2^2 n)$
entspricht 12m [12, 24, 36, …]
G/2 = g
E = 1+2x
p1 mod 6 ≡ -1 für Primzahlzwillinge und wenn E mod 6 ≡ +1, für E mod 6 ≡ -1 ist p1 mod 6 ≡ +1
p2 mod 6 ≡ +1 für Primzahlzwillinge und wenn E mod 6 ≡ +1, für E mod 6 ≡ -1 ist p2 mod 6 ≡ -1

Alle Primzahlzwillinge haben den Abstand von 2.
Der equidistante Abstand zur geraden Zahl G/2 ist 1.
Die Folge 12m/2 = 6m enthält alle geraden Zahlen der Form 6m.
Primzahlzwillinge sind immer für p1 = 6m-1 und p2 = 6m+1.

Für alle 6m, die nicht Zentrum eines Primzahlzwillings sind, existiert eine Primzahlkombination, die 1+2x als minimale Equidistanz hat. Die minimale Equidistanz muss ungerade sein, da G/2 gerade ist, kann aber kein Vielfaches von 3 sein, $x \neq 3k+1$.

$(12m)/2 \pm (1+2x)$ erfüllt für $(1+2x) \bmod 6 \equiv \pm 1$ die Bedingung $6n\pm 1$ für Primzahlen.

$(12m)/2 + (1+2x) = 6m + (1 + 2(3k)) = 6(m+k) + 1$
$(12m)/2 - (1+2x) = 6m - (1 + 2(3k)) = 6(m-k) - 1$

$(12m)/2 + (1+2x) = 6m + (1 + 2(3k+2)) = 6(m-1+k) - 1$
$(12m)/2 - (1+2x) = 6m - (1 + 2(3k+2)) = 6(m-1+k) + 1$

Z.B. hat G/2 = 72/2 = 36 mit der Equidistanz 5, 36 ± 5 die beiden Primzahlen 31, 41 mit dem Abstand A=10 als Ergebnis, enthalten in F31: 0, 6, 10, 12, ...
E (5) mod 6 ≡ -1, p1 (31) mod 6 ≡ +1, p1 (41) mod 6 ≡ -1

G/2 = 108/2 = 54 hat mit der Equidistanz 7, 54 ± 7 die beiden Primzahlen 47 und 61 mit dem Abstand A=14 als Ergebnis, enthalten in F47: 0, 6, 12, 14, ...
E (7) mod 6 ≡ +1, p1 (47) mod 6 ≡ -1, p2 (61) mod 6 ≡ +1

2.
$G = 3*(2^2n+2)$
entspricht 12m+6 [6, 18, 30, …]
G/2 = u
E = 2x
p1 mod 6 ≡ +1 für E = 2+6k, p1 mod 6 ≡ -1 für E = 4+6k
p2 mod 6 ≡ -1 für E = 2+6k, p2 mod 6 ≡ -1 für E = 4+6k

Weil G/2 ungerade ist, muss E gerade sein, damit wieder eine ungerade Zahl herauskommt. Dabei kann x kein Vielfaches von 3 sein, da G/2 mod 3 ≡ 0 ist.

(12m+6)/2 ± (2+6k) und (12m+6)/2 ± (4+6k) erfüllen die Bedingung 6n±1 für Primzahlen.

(6m+3) - (2+6k) = 6(m-k) + 1
(6m+3) + (2+6k) = 6(m+k) + 5 = 6(m+k+1) – 1

(6m+3) - (2+6k) = 6(m-k) - 1 = 6(m-k) – 1
(6m+3) + (4+6k) = 6(m+k) + 7 = 6(m+k+1) + 1

3.
$G = 3*(2^2n+1) - 1$
entspricht 12m+14 [14, 26, 38, …]
G/2 = u
E = 6x
p1 mod 6 ≡ +1
p2 mod 6 ≡ +1

(12m+14)/2 ± 6x erfüllen die Bedingung 6n+1 für Primzahlen.

(12m+14)/2 + 6x = 6m+7 + 6x = 6(m+x+1) + 1
(12m+14)/2 - 6x = 6m+7 - 6x = 6(m-x+1) + 1

4.
$G = 3*(2^2n+3) + 1$
entspricht 12m+10 [10, 22, 34, …]
G/2 = u
E = 6x
p1 mod 6 ≡ -1
p2 mod 6 ≡ -1

(12m+10)/2 ± 6x erfüllen die Bedingung 6n-1 für Primzahlen.

(12m+10)/2 – 6x = 6m+5 – 6x = 6(m+1-x) – 1
(12m+10)/2 + 6x = 6m+5 + 6x = 6(m+1+x) - 1

5.
$G = 3*(2^2n+1) + 1$
entspricht 12m+16 [16, 28, 40, …]
$G/2 = g$
$E = 3x$
$p1 \bmod 6 \equiv -1$
$p2 \bmod 6 \equiv -1$

$(12m+16)/2 \pm 3x$ für ungerade $x = 2k+1$ erfüllen die Bedingung 6n-1 für Primzahlen.

$(12m+16)/2 - 3x = 6m+8 – 3(2k+1) = 6(m+1)+2 – 3(2k+1) = 6(m+1)+2 – 6k-3 = 6(m+1-k) - 1$
$(12m+16)/2 + 3x = 6m+8 + 3(2k+1) = 6(m+1)+2 + 6k+3 = 6(m+1+k)+5 = 6(m+2+k) - 1$

6.
$G = 3*(2^2n+3) - 1$
entspricht 12m+8 [8, 20, 32, …]
$G/2 = g$
$E = 3x$
$p1 \bmod 6 \equiv +1$
$p2 \bmod 6 \equiv +1$

$(12m+8)/2 \pm 3x$ für ungerade $x = 2k+1$ erfüllen die Bedingung 6n+1 für Primzahlen.

$(12m+8)/2 - 3x = 6m+4 – 3(2k+1) = 6m+4 – 6k-3 = 6(m+k) + 1$
$(12m+8)/2 + 3x = 6m+4 – 3(2k+1) = 6m+4 + 6k+3 = 6(m+k+1) + 1$

Damit ist für alle 6 möglichen Folgen, die alle geraden Zahlen beschreiben, gezeigt, dass es Primzahlen gibt, für die gilt:

$p1 = G/2 – E$ und $p2 = G/2 + E$

5. Zur schwachen Goldbachschen Vermutung

Zieht man von einer ungeraden Zahl eine ungerade Primzahl ab, bleibt eine gerade Zahl. Diese lässt sich wie oben beschrieben in zwei ungerade Primzahlen als Summe zerlegen.
Für den einstelligen Bereich müsste man die 1 als Primzahl zulassen, damit die Idee von Goldbach verwirklicht werden kann, dass jede Zahl größer zwei als Summe von drei Primzahlen dargestellt werden kann.
3=1+1+1,   4=1+3=1+2+1,   5=1+3+1,   6=2+2+2=1+2+3
7= 3+1+3=2+2+3, 1+5+1, 8=3+2+3=1+2+5, 9=1+3+5=3+3+3=2+5+2

Jede gerade Zahl lässt sich immer als Summe von einer geraden Zahl und zweier ungeraden Zahlen darstellen, sodass
$2 + G = 2 + p_1 + p_2$
Damit sind auch alle geraden Zahlen als Summe von drei Primzahlen darstellbar.